CIENCIAS
BÁSICAS

LIBROS DE TEXTO

Física I.

Introducción a la mecánica

CIENCIAS
BÁSICAS

LIBROS DE TEXTO

Física I.

Introducción a la mecánica

Franklin Antonio Mora Maestre

UNIAGUSTINIANA
Es creer en ti
Vigilada Mineducación

Editorial
UNIAGUSTINIANA

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Mora Maestre, Franklin Antonio
Física I : introducción a la mecánica / Franklin Antonio Mora Maestre.
-- 1a ed. -- Bogotá : Uniagustiniana, 2021.
p. -- (Ciencias básicas. Libros de texto)

Incluye referencias bibliográficas al final de cada capítulo.

ISBN 978-958-5498-61-7 (impreso) -- 978-958-5498-62-4 (digital)

1. Mecánica - Libros de texto 2. Física - Libros de texto I. Título II. Serie

CDD: 531 ed. 23 CO-BoBN– a1079136

Física I. Introducción a la mecánica

Primera edición: octubre de 2020
ISBN (impreso): 978-958-5498-61-7
ISBN (digital): 978-958-5498-62-4

Editorial Uniagustiniana
Ruth Elena Cuasialpud Canchala, coordinadora editorial y de difusión
Leonardo Paipilla Pardo, editor asistente

Evaluación por pares
Recepción: julio de 2019
Evaluación: noviembre de 2019
Aprobación final: marzo de 2020

Edición
Hernando Sierra Castillo, corrección de estilo
Laura Alexandra Olmos Núñez, diseño de portada y diagramación
Xpress, Estudio gráfico y digital, Xpress Kimpres, impresión

Campus Tagaste, Av. Ciudad de Cali # 11B – 95

editorial@uniagustiniana.edu.co

Impreso y hecho en Bogotá, Colombia. Depósito legal según Decreto 460 de 1995.

Contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Unidad 1

Sistemas de medida

Resumen

La mecánica, como todo saber del campo general de la física, tiene un carácter experimental, por ende, hace uso de unidades de medición que se definen con gran exactitud. Aunque en el mundo existen varios sistemas de medición, en este texto se hace uso del sistema internacional de medida (SI), el cual toma como unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s), respectivamente. De igual manera, en esta unidad se encuentran temas importantes como, por ejemplo, las magnitudes físicas, la medición, la conversión de unidades, el análisis dimensional, la notación científica, las cifras significativas y la teoría del error, entre otros.

Palabras clave: análisis, conversión, error, notación, sistema de medición, teoría.

A. Introducción

En el transcurrir de la vida humana, al hombre le ha sido posible aprender a comparar algunas características, cualidades o atributos, lo cual le permite medir las propiedades de una sustancia, las condiciones de un objeto o los elementos de un cuerpo, lo cual realiza con un patrón de medida en particular, acordado por él mismo. De manera similar, se reconocen ciertas condiciones que no se pueden medir. Entre las que se pueden medir se encuentran la longitud, la masa, el tiempo, la temperatura, el volumen, la densidad y el peso. Entre las que no se pueden medir tenemos la angustia, la nostalgia y el dolor, entre otras. De esta manera, es posible aducir que la física es la ciencia que se encarga de medir los atributos medibles de las sustancias y los cuerpos.

B. Magnitud física

Como se define en [1], en el mundo físico se conoce como "magnitud física" a cualquier propiedad o característica de los cuerpos que se pueda medir. Estas se clasifican en magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas.

1) Magnitudes fundamentales

Son las que se definen independientemente de cualquier otra magnitud o dimensión [2], y que, según [3], requieren de una definición clara. Además, con el fin de establecer acuerdos mutuos a nivel mundial con respecto a la medición de las magnitudes físicas fundamentales se identificaron y establecieron siete magnitudes consideradas dentro de este concepto: la masa, la longitud, el tiempo, la temperatura, la corriente, la cantidad de sustancia y la intensidad luminosa. Estas se establecieron a través del Comité Internacional de Pesos y Medidas, en el cual se consideró que eran las magnitudes específicas y necesarias para definir las demás.

2) Magnitudes derivadas

Son las que quedan determinadas al combinar operacionalmente las magnitudes fundamentales de forma adecuada por medio de las operaciones matemáticas básicas conocidas [4]. Entre este tipo de magnitudes se encuentran la velocidad, la aceleración, la fuerza, la densidad, el volumen y el área, entre otras. Ahora bien, como es de conocimiento, en todos los textos de física mecánica se hace uso de las tres primeras magnitudes físicas fundamentales, es decir, la masa, la longitud y el tiempo. Las demás magnitudes físicas derivadas (velocidad, aceleración, fuerza, trabajo, potencia, presión, etc.) se obtienen al combinar las fundamentales de forma exacta por medio de operaciones matemáticas [1].

C. La medición

Figura 2. Estudiantes realizando mediciones en el laboratorio. Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [5], la medición es el proceso mediante el cual, el hombre común, al igual que el hombre de ciencia, realiza comparaciones entre un patrón de medida denominado, por lo general, "unidad de medida", y un objeto, propiedad o tributo. Cuando se realizan mediciones en física se le asigna a cualquier propiedad o atributo de una sustancia, cuerpo o fenómeno físico un valor que nos indica el número de unidades que tiene la propiedad medida.

De por sí, el hombre, con el fin de determinar de forma precisa o exacta el valor de cada uno de los atributos físicos, se ha inventado una serie de dispositivos de medida. Así, por ejemplo, para medir la altura o la longitud de un objeto creó la cinta métrica; para el tiempo, el reloj; para la presión interna en una tubería cerrada, el manómetro; para la presión atmosférica, el barómetro; para la temperatura de un cuerpo cualquiera, el termómetro; para el volumen de una sustancia, la probeta; para la fuerza aplicada a un cuerpo, el dinamómetro; para la rapidez con que se mueve un móvil, el velocímetro, entre otros.

El físico, a fin de llevar a cabo una medición de algo, tiene que tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Identificar el cuerpo, la sustancia o el fenómeno físico a medir.
- Seleccionar el tipo adecuado de instrumento de medición.
- Interpretar la unidad de medida a emplear.
- Conocer de manera idónea el agente activo u operador que realiza la medida.

1) Clasificación de las mediciones

Las mediciones según la forma, el modo o las técnicas de realización —en lo cual juega un papel muy importante y decisorio las características del objeto y el instrumento de medición empleado—se clasifican en mediciones directas y mediciones indirectas [1].

a) Medición directa

Se da cuando, de manera directa y por medio de un instrumento de medida, se realiza una medición de alguna magnitud física. Es decir, se realiza una comparación de la magnitud a conocer con una escala material de medida, de tal forma que el resultado inmediato es un número puro y una unidad de medida [2]. Esta acción de comparar determina el número de veces que la unidad de medida establecida está contenida en ella.

b) Medición indirecta

En este tipo de mediciones se utilizan, por lo regular, valores directos de algunos observables físicos (cuyo objetivo no es el conocimiento de ellos). Sin embargo, estos primeros observables pueden encontrarse computados y asociados por medio de las operaciones matemáticas básicas conocidas, y a través de una fórmula o ecuación matemática a otro observable no conocido, de tal forma que el valor de este último dependa del valor que tomen los primeros. Por ejemplo, a partir de las reglas de la geometría euclideana podemos calcular la distancia a un objeto remoto o inaccesible mediante el método indirecto de la triangulación [2].

Siempre en las mediciones indirectas se hace uso de alguna ecuación o fórmula matemática en la cual el valor de la magnitud física que se quiere conocer surge de operar los valores directos conocidos de otras magnitudes, pero que su valor obtenido es lo que se denomina “una medida indirecta”. Así, por ejemplo, para determinar el valor del área de una mesa de forma rectangular se tienen que realizar mediciones directas de su largo y ancho, y sustituir los valores directos determinados en la ecuación:

$$A = l \; x \; \mathrm{a} \tag{1}$$

Donde:

A = área de la mesa.
l = largo de la mesa.
a = ancho de la mesa.

El valor que se obtiene del área de la mesa por medio de (1) con los valores del largo y el ancho medido es una medida indirecta. Además, algunas magnitudes pueden medirse tanto por el método directo como por el indirecto (por ejemplo, la masa de los planetas se logra obtener por métodos indirectos).

2) Unidad de medida

Figura 3. Estudiantes preparándose para realizar mediciones directas. Fuente: elaboración propia

Siempre que se quiera efectuar una medida de una observación física es necesario disponer de una unidad de medida. Esta última debe ser de la misma naturaleza que la magnitud física que se desea calcular [6]. Cuando se ha establecido la unidad, por medio de esta se realizan comparaciones con el fin de determinar el número de veces que la unidad está contenida en el atributo físico a medir.

Al final el resultado nos arrojará un valor numérico que nos dirá las veces que la propiedad física es mayor o menor que la unidad de medida utilizada.

A través de la historia, el ser humano inventó numerosas unidades de medidas antes de crear lo que se conoce actualmente como "Sistema Internacional de Medida". Lógicamente, para cada tipo de magnitud física debe establecerse una unidad, de modo que se encuentra la unidad de longitud, de tiempo, de masa, de presión absoluta, etc.

a) Clasificación de las unidades de medida

Las unidades de medida se clasifican en unidades fundamentales o básicas y unidades derivadas:

- *Unidades fundamentales o básicas.* Son aquellas correspondientes a las magnitudes fundamentales, es decir, este tipo de unidades no se derivan de ninguna otra unidad de medida, sino a través de un estándar [7].
- *Unidades derivadas.* Se definen debido a una combinación de las unidades de medida fundamentales, así como de algunas medidas derivadas. Estas corresponden a las magnitudes o cantidades derivadas [7].

b) Sistema Internacional de Unidades

En [1] y [2] se muestra que, históricamente, el hombre en su necesidad de lograr evolucionar las técnicas de medición tuvo que redefinir las unidades fundamentales. Es así como, en 1960, en la décimoprimera Conferencia General de Pesos y Medidas (CGPM), desarrollada en París, se elaboró (tomando como basé el Sistema Métrico Decimal) un nuevo sistema denominado "Sistema Internacional de Unidades" (SI). Este sistema aún se acepta mundialmente.

El sistema internacional de unidades se encuentra integrado por:

- Los patrones de medida.
- Una estrategia metodológica para la formación de unidades menores y mayores.
- Conceptos y definiciones de las magnitudes derivadas tales como velocidad, trabajo, aceleración, potencia, etc.

En relación con las unidades fundamentales del (SI) de medidas, en la Tabla I se muestran las siete unidades fundamentales que integran el Sistema Internacional de Medidas y sus símbolos correspondientes [7].

Tabla I

Unidades Fundamentales del Sistema Internacional de Medidas

Magnitud física	Unidad de medida	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Temperatura	Kelvin	k
Intensidad de corriente eléctrica	Ampere	A
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

A medida que el conocimiento científico y el avance tecnológico aumentan se han generado cambios en los conceptos de las unidades fundamentales. En [1] se expresan las definiciones actuales de las diferentes unidades de medida de la siguiente manera:

- *El metro (m)*. Se define como la distancia que recorre la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299792458 se. Este concepto se formuló en 1983, en la decimoséptima reunión de la CGPM; en esta se aceptó y estableció que la rapidez con que se mueve la luz en el vacío es de 299 792 458 m/s.
- *El kilogramo (kg)*. Se considera como la masa equivalente a la de un cilindro que está compuesto por una aleación de platino-iridio, la cual es extraordinariamente estable. Este cilindro se encuentra en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres, Francia. Debido a la especial estabilidad de la aleación platino-iridio todavía se conserva su definición en la actualidad, aunque esta se estableció en 1889.
- *El segundo (s)*. Se define como el tiempo empleado por un átomo de Cesio133 para realizar 9 192 631 770 vibraciones, las cuales son correspondientes a la transición dada entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo. La anterior definición se estableció en la decimotercera reunión de la CGPM, realizada en 1967.

- *El kelvin (k)*. Se considera como la fracción 1/273,16 de la temperatura del punto triple del agua. Cuando al agua coexiste entremezclada en sus tres estados físicos (sólido, líquido y vapor) en equilibrio térmico, se dice que se encuentra en su punto tripe. En esta condición especial del agua esta presenta una temperatura y presión única propia de este estado. Este concepto se estableció en la decimotercera reunión de la (CGPM) en el año de 1967.
- *El ampere (A)*. Se define como la intensidad de una corriente constante establecida en dos conductores rectilíneos y paralelos, de longitudes infinitas y de sección transversal circular despreciable, los cuales se encuentran en el espacio vacío y separados por una distancia de un metro. El valor de la intensidad de corriente aplicado en los dos conductores debe generar en cada uno de ellos un campo magnético, de manera que al interaccionar mutuamente deben producir una fuerza magnética de 2×10^{-7} newton por cada metro de longitud. Esta unidad de corriente se estableció en 1948 y se llamó así en honor al físico francés André Marie Ampere.
- *El mol*. Se considera como la cantidad de cualquier sustancia específica que contiene un número de entidades elementales equivalentes a la cantidad de átomos que hay en 0,012 kg de carbono 12. Siempre que se utilice el mol se tienen que especificar las entidades elementales utilizadas, ya que estas pueden ser electrones, átomos, iones, moléculas u otras partículas. Esta definición de mol es aceptada desde 1971. El mol también se define actualmente como aquella masa de la sustancia que contiene un numero de Avogadro $N_a = 6{,}022 \times 10^{23}$ de moléculas.
- *La candela (cd)*. Se define como la intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite una radiación electromagnética monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz, cuya intensidad energética en esa dirección es de 1/683 watt por esterradián. Está unidad se estableció en la decimosexta reunión de la CGPM, en 1979.

Además de las unidades descritas, en el Sistema Internacional (SI) se encuentran otras dos unidades suplementarias: el radian y el esterradián. La primera nos permite expresar las medidas de ángulos en el plano y la segunda las medidas de ángulos sólidos en el espacio.

Ahora bien, con relación a las unidades derivadas del sistema internacional de medida, tal como se expresó se deducen al combinar las unidades fundamentales, las unidades suplementarias y otras unidades derivadas a través de las operaciones matemáticas básicas conocidas y establecidas en las ecuaciones algebraicas que las relacionan. Por ejemplo, la unidad del observable físico llamado "rapidez" se deduce al considerar la ecuación que la define:

$$V = x/t \qquad (2)$$

Así como en sustituir las unidades de las magnitudes de los observables físicos circunscritos en esta (es decir, la unidad del observable físico llamado "rapidez" es m/s). Sin embargo, existen algunos observables físicos cuyas unidades si bien son derivadas, tienen nombres especiales que tienen como fin brindarles honor a ciertos hombres de ciencia que hicieron grandes aportes a la física.

En la Tabla II se muestran algunas de estas unidades derivadas que tienen nombres especiales, las cuales serán, además, de estricta utilización en el desarrollo del texto [7].

Tabla II

Nombres especiales de algunas magnitudes derivadas

Magnitud física	Unidad de medida	Símbolos
Fuerza	Newton	N
Trabajo o energía	Joule	J
Potencia	Watt	W
Presión	Pascal	Pa

c) Conversión de unidades

Debido a que en el mundo en el que nos encontramos estamos relacionados con entidades grandes y pequeñas, el hombre se vio en la necesidad de crear otras unidades para medir y expresar las magnitudes o valores del mismo observable físico. Esto nos permite entender porqué en la ciencia y en la vida cotidiana no siempre se expresa el resultado en términos de las unidades fundamentales o sus derivadas conocidas y establecidas en las tablas anteriores. Por ejemplo, a fin de expresar la distancia que existe entre Valledupar y Bogotá se utilizan kilómetros y no metros, o para determinar la longitud de un borrador hablamos de centímetros. Es decir, muchos resultados se expresan en unidades denominadas "múltiplos" (cantidades que son mayores a la unidad), y "submúltiplos" (cantidades que son menores a la unidad) de las unidades fundamentales.

Es común que en el sistema internacional (SI) se empleen ciertas letras o silabas que se colocan delante de algunas palabras con el fin de añadir algo a su significado, denominadas “prefijos”. Es así como estos últimos van antepuestos a la unidad para indicar los diferentes múltiplos y submúltiplos. Cada uno de estos prefijos se representa por un símbolo determinado, tal como se presenta en la Tabla III [8], [9].

Tabla III

Prefijos del sistema internacional de medidas

Nombre	Símbolo	Valor
Yotta	Y	10^{24} = 1 000 000 000 000 000 000 000 000
Zetta	Z	10^{21} = 1 000 000 000 000 000 000 000
Exa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000
Peta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000
Tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
Giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
Mega	M	10^{6} = 1 000 000
Kilo	K	10^{3} = 1 000
Hecto	h	10^{2} = 100
Deca	da	10^{1} = 10
Deci	d	10^{-1} = 0.1
Centi	c	10^{-2} = 0.01
Mili	m	10^{-3} = 0.001
Micro	µ	10^{-6} = 0.000 001
Nano	η	10^{-9} = 0.000 000 001
Pico	p	10^{-12} = 0.000 000 000 001
Fento	f	10^{-15} = 0.000 000 000 000 001
Atto	a	10^{-18} = 0.000 000 000 000 000 001
Zepto	z	10^{-21} = 0.000 000 000 000 000 000 001
Yocto	Y	10^{-24} = 0.000 000 000 000 000 000 000 001

Según [8], la importancia de utilizar los múltiplos y los submúltiplos de una unidad de medida consiste en que permiten expresar cantidades grandes o pequeñas de forma simple y práctica, tal como se muestra en la Tabla IV.

Tabla IV

Valores de longitudes, expresados en múltiplos o submúltiplos de la unidad

Valor de longitud dado	Valor equivalente en otra unidad
800 000 cm	8 km
6 000 000 m	6Mm
0.02m	2cm
100mm	10cm
0,000001km	1mm

Además, en nuestro medio es común observar el empleó de distintas unidades para medir la misma magnitud u observable físico, bien sea para la misma o bien para otra. De esta manera, el tiempo final empleado por un atleta en una carrera de fondo puede medirse en horas, mientras que para medir el tiempo que otro atleta emplea en una competencia en los cuatrocientos metros vallas se utilizan los minutos. Este hecho de utilizar diversas unidades de medida de la misma naturaleza para diferentes o iguales actividades y labores nos lleva a la necesidad, en ciertas ocasiones, de convertir la cantidad establecida y expresada en una determinada unidad a otra. En los problemas de conversión de unidades comúnmente se presentan los siguientes dos tipos de procesos: la conversión de unidades pertenecientes al mismo sistema de medida y la conversión de unidades de distintos sistemas de medida.

Así, entonces, la conversión entre unidades pertenecientes al mismo sistema de medida, de acuerdo con [1], se realiza de una unidad mayor a una menor, o de una unidad menor a otra mayor; por ejemplo, de horas (h) a segundos (s), o de metros (m) a kilómetros (km) en el SI.

Por su parte, para la conversión entre unidades de distintos sistemas de medidas se toma una cantidad perteneciente a un determinado sistema de medida y se convierte a otra u otras unidades de otro sistema de medida. Por ejemplo, convertir metros del SI a pie (ft) del sistema inglés. En cualquiera de los dos casos anteriores de conversión se requiere realizar simplemente una operación de tipo aritmética, la cual consiste en multiplicar la cantidad dada a transformar por un término llamado factor de conversión, o en su defecto determinar la relación proporcional entre las magnitudes a solucionar [8].

En sí, el factor de conversión es el cociente o razón igual a uno que se obtiene al dividir cualquier unidad de medida por su valor de unidad equivalente. Tanto la unidad de medida como su valor de unidad equivalente deben ser de la misma naturaleza, y este último puede pertenecer o no al mismo sistema de medición.

La Tabla V contiene algunos ejemplos en los que se muestran varios factores de conversión que resultan de ciertas equivalencias [1].

Tabla V

Factores de conversión de algunas equivalencias

Equivalencia entre algunas unidades	**Factores de conversión entre las equivalencias**
1kg = 1000 gr	$\frac{1000gr}{1kg}=1$ o también, $\frac{1\text{kg}}{1000gr}=1$
1m = 100 cm	$\frac{100cm}{1m}=1$ o también $\frac{1m}{100cm}=1$
1L = 1000 cm^3	$\frac{1000cm^3}{1L}=1$ o también, $\frac{1L}{1000cm^3}=1$
1km = 1000 m	$\frac{1000m}{1\text{k}m}=1$ o también, $\frac{1\text{k}m}{1000m}=1$

Los ejemplos registrados en la Tabla V nos sugieren que para obtener los factores de conversión se debe conocer la equivalencia entre las unidades. Con el fin de que el lector profundice más en el tema, a continuación, en la Tabla VI se registran algunas otras equivalencias de gran importancia.

Tabla VI

Ejemplos de equivalencias entre unidades de longitud

1 m = 1000 mm	1pulgada = 2,54 cm
1 m = 10^{-10} angstrom	1 milla = 1609 m
1 pie = 12 pulgada	1 yarda = 3 pies

En el proceso de conversión de unidades la clave esta en que podemos expresar la misma cantidad física en dos unidades distintas y formar una igualdad [10]. De igual manera, para realizar una conversión de una unidad a otra utilizando el concepto de factor de conversión es necesario tener presente que el resultado obtenido de todo número o valor multiplicado por uno será siempre el mismo número o valor. Por ejemplo:

- 8 cm x 1 = 8 cm.
- 20 m x 1 = 20 m.

Ahora, dado que todo factor de conversión es igual a uno, es fácil entender porqué en la expresión 20 m x 1 el valor unitario que aparece en ella se puede sustituir por el factor de conversión:

$$\frac{100cm}{1m}$$

El cual se encuentra registrado en la Tabla I, de manera que queda el término expresado así:

$$20\ mx1 = 20m\ x\ \frac{100cm}{1m}$$

Al simplificar en el miembro derecho en la expresión anterior las unidades semejantes y realizar las operaciones correspondientes se obtiene 20 m = 2000 cm.

Como se puede observar, todos los procedimientos anteriores nos llevaron a convertir los 20 m dados a cm. En sí, todos estos procedimientos utilizados, en los cuales se hizo uso del concepto de factor de conversión, nos muestran que es una manera lógica y correcta de resolver problemas de conversiones entre unidades de longitud, de masa, de tiempo, etc. Además, se puede afirmar que las soluciones de problemas de conversión entre unidades se reducen simplemente a multiplicar la cantidad dada por el factor de conversión apropiado, el cual se escoge y ajusta a lo pedido en el ejercicio.

Ejemplo 1.

¿A cuántos metros corresponden 8 468 mm?

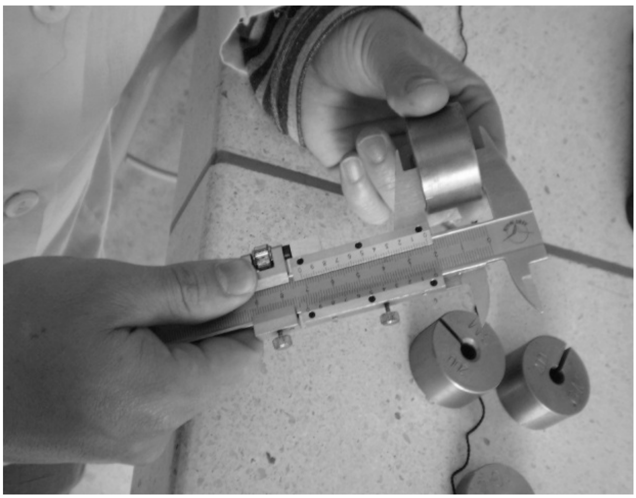


Figura 4. Estudiantes realizando mediciones en milimetros para convertirlos a metro.
Fuente: elaboración propia

Solución

En este ejercicio se pide convertir las unidades de milímetros a metros. Inicialmente, lo que se hace es buscar el factor de conversión adecuado a partir de la equivalencia entre la unidad de metro y los milímetros. Este factor de conversión elegido por conveniencia debe tener en el denominador de la fracción o razón la unidad de mm, y en su numerador la unidad de m. Dado que en la Tabla VI se tiene la equivalencia 1 m = 1000 mm, el factor de conversión apropiado debe ser:

$$\frac{1m}{1000mm}=1$$

Ahora, al multiplicar la cantidad a convertir por el factor de conversión anterior establecido se tiene:

$$8\ 468mm \text{ x } 1 = 8\ 468mm\ x\ \frac{1m}{1000mm} = 1$$

Simplificando términos semejantes se puede decir que:

$$8\ 468mm\ x\ 1 = \frac{8\ 468m}{1000} = 8{,}468m$$

Por tanto:

$$8\ 468mm = 8,\ 468m$$

Se observa que el factor de conversión se escogió de tal forma que la unidad de los mm se simplificó. A esto se hace referencia cuando se refiere lo de escoger el factor adecuado en el proceso de pasar una unidad a otra.

Ejemplo 2.

¿A cuántos metros corresponden 10 000 pulgadas?

Figura 5. Estudiantes realizando mediciones en pulgadas para convertirlas a metro.
Fuente: elaboración propia

Solución

De la Tabla VI sabemos que 1 pulgada es igual a 2,54 cm. Se conoce, además, que 1 m es igual a 1000 cm. Al no conocer la equivalecia entre dos unidades (como en este caso la relación existente entre metros y pulgadas) se pueden utilizar relaciones intermedias para la solución del problema, tal como se muestra en el siguiente proceso:

$$10\,000 \text{ pulgadas } x \; \frac{2{,}54\text{cm}}{1 \text{ pulgada}} = 25400\text{cm}$$

Es decir,

$$10\,000 \text{ pulgada} = 25\,400\text{cm}$$

Al tener en cuenta la igualdad anterior, tenemos,

$$25\,400\text{cm } x \; \frac{1m}{100cm} = \frac{25400\text{m}}{100} = 254m$$

Finalmente, se concluye:

$$10\,000 \text{ pulgadas} = 254\text{m}$$

Ejemplo 3.

Convertir 100 gr a kg.

Figura 6. Medición de masas de varias pesas en gramos. Fuente: elaboración propia

Solución

Al utilizar del factor de conversión, tenemos:

$$100gr = 100gr \text{ x } 1 = 100gr \text{ x } \frac{1\text{kg}}{1000gr}$$

Al simplificar las unidades correspondientes y dividir los términos, se obtiene:

$$100gr = 0{,}1\text{kg}$$

D. Análisis dimensional

Antes de entrar en detalle a conceptualizar acerca de la pregunta ¿en qué consiste el análisis dimensional?, se aclara que en este texto se considera la palabra *dimensión* como sinónimo de "magnitud fundamental" [2]. Ahora bien, en el mundo de la física —como se trató anteriormente — encontramos observables físicos que se conocen como "magnitudes fundamentales", los cuales se encuentran integrados por la longitud, la masa, el tiempo, la temperatura, la intensidad luminosa, la cantidad de sustancia y la intensidad de corriente, entre otros. Cada una de estas magnitudes tiene su propia dimensión, la cual determina su naturaleza y es independiente de su valor, así como de las unidades que se utilicen para medirla. Otros observables, como, por ejemplo, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el trabajo y la potencia, etc., se conocen como magnitudes derivadas y sus expresiones dimensionales surgen de la representación de la ecuación física que define a cada una de ellas. Sus magnitudes también se expresan en términos de sus dimensiones, independientemente de su valor y de las unidades que utilizan, tal como ocurre con las magnitudes fundamentales. Por ejemplo, si se mide una distancia en unidades de metros, codos o pulgadas, se trata de la magnitud fundamental distancia y su dimensión es la longitud, es decir, $[\mathbf{d}] = L$; si se mide la rapidez de un móvil en unidades de metro sobre segundo, pies sobre segundo o pulgadas sobre segundo, se refiere a la magnitud derivada llamada "rapidez" y su dimensión se expresa, de acuerdo con [11], como:

$$[\,\mathbf{v}\,] = L / T = L\,T^{-1} \tag{3}$$

Por lo general, en el análisis dimensional se utilizan corchetes para representar las dimensiones de una magnitud; los símbolos que se usarán para especificar dimensiones básicas tales como la longitud, la masa y el tiempo son: L, M y T, tal como se puede observar en los ejemplos anteriores.

En sí, el análisis dimensional es un tema de gran importancia en la ciencia y, en especial, en el mundo de la física y las matemáticas, ya que es una herramienta conceptual que permite comprender los diferentes fenómenos que se presentan e involucran una combinación de diferentes cantidades físicas. Constantemente se utilizan con el fin de verificar relaciones y cálculos, así como para construir hipótesis razonables sobre situaciones abstractas y complejas que puedan verificarse en el campo de la experimentación.

En particular en la física, uno de sus usos se basa en el requerimiento de consistencia dimensional. Este requerimiento está relacionado con la Segunda Ley de Newton. Cuando se describen magnitudes en mecánica, los conjuntos de magnitudes utilizadas pueden ser arbitrarias; sin embargo, existen dos tipos de sistemas de magnitudes: los consistentes y los no consistentes. Se diría que un sistema de magnitudes es consistente si las magnitudes que lo definen verifican la propiedad [F] = [M] [A], donde los corchetes indican la magnitud. En mecánica, para que un sistema pueda utilizarse debe ser consistente. Aquí la palabra *consistente* significa que, al realizar el análisis dimensional a una ecuación física, esta debe ser dimensionalmente correcta. Es decir, según [11], tenemos que:

$$[F] = MLT^{-2} \qquad (4)$$

Ejemplo 1.

Determine las dimensiones de la magnitud de aceleración *a*.

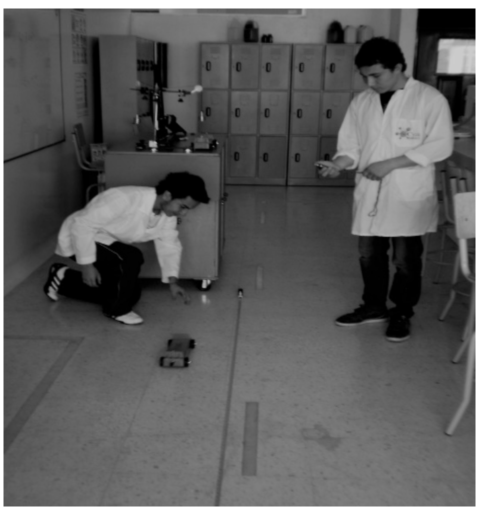


Figura 7. Estudiantes realizando calculo de velocidad y aceleración. Fuente: elaboración propia

Solución

La magnitud de aceleración se puede expresar como a = v / t, donde *v* representa la rapidez y *t* el tiempo. Las dimensiones de la rapidez y del tiempo están dadas por:

$[v] = L\,T^{-1}$ y $[t] = T$. Por tanto, las dimensiones de la magnitud de la aceleración queda expresada de la siguiente manera:

$$[a] = \frac{L\,T^{-1}}{T} = (L\,T^{-1})\,T^{-1} = L\,T^{-2}$$

Ejemplo 2.

Determine las dimensiones de la magnitud de fuerza *F*.

Solución

Según la Segunda Ley de Newton, la magnitud de fuerza se determina a través de la expresión F = ma, donde *m* representa la masa del cuerpo, al cual se le aplica la fuerza, y *a* es su magnitud de aceleración. Las dimensiones de la masa y de la magnitud de aceleración están representadas por m = M y $a = LT^{-2}$, por tanto, la dimensión de la magnitud de fuerza F queda expresada así:

$$[F] = MLT^{-2}$$

En la Tabla VII se muestran las magnitudes físicas fundamentales y sus dimensiones [12], [13].

Tabla VII

Magnitudes físicas fundamentales y sus dimensiones

Magnitud física	**Unidad (SI)**	**Símbolo**	**Dimensión**
Masa	kilogramo	kg	M
Longitud	Metro	M	L
Tiempo	segundo	s	T
Temperatura	kelvin	k	k^0
Intensidad de corriente	ampere	A	I
Intensidad luminosa	candela	cd	J
Cantidad de sustancia	mole	Mol	N

La Tabla VIII muestra las dimensiones de algunas magnitudes matemáticas y físicas derivadas [12], [13].

Tabla VIII

Magnitudes derivadas y sus dimensiones

Magnitud	**Formula**	**Dimensión**
Área	A	L^2
Volumen	V	L^3
Rapidez media	$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	LT^{-1}
Magnitud de aceleración media	$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t}$	LT^{-2}
Magnitud de fuerza	F = m.a	MLT^{-2}
Trabajo	$W = \vec{F}\ _0\ \vec{d}$	ML^2T^{-2}
Potencia	$P = \frac{W}{t}$	MLT^{-3}
Presión	$P = \frac{F}{A}$	$ML^{-1}T^{-2}$
Rapidez angular media	$W_m = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$	T^{-1}
Magnitud de aceleración angular media	$a = \frac{\Delta W}{\Delta t}$	T^{-2}
Magnitud cantidad de movimiento	p = m.v	MLT^{-1}
Carga eléctrica	$q = I.\Delta t$	IT
Diferencia de potencial eléctrico	$V = \frac{w}{q}$	$ML^{-2}I^{-1}T^{-3}$
Resistencia eléctrica	$R = \frac{\Delta V}{I}$	$ML^{-2}I^{-2}T$

E. Notación científica

Muchas magnitudes con las que trabaja el hombre de ciencia tienen valores muy pequeños o muy grandes. De esta manera, dado que en la naturaleza encontramos partículas materiales con masas muy pequeñas, como el electrón, o cuerpos inmensos y de grande masa, como el sol; partículas llamadas “fotones” que se mueven a rapidez alta, como la de la luz, o larvas que se mueven a rapidez relativamente pequeña, como la de la oruga de una mariposa; o sucesos cuya duración de tiempo es muy corta, como la vida media de las partículas menos estables, o de tiempo de vida larga, como las estrellas.

Así, por ejemplo, sabemos que la masa m_e del electrón es de m_e = 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 938 97 kg, y la masa ms del sol es de m_s = 1 991 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Como se observa en las dos cantidades de masas definidas, el número de cifras que se emplean para expresar la masa del electrón y la del sol son extremadamente grandes. Estos y otros casos llevaron al hombre de ciencia a crear una forma más simple, cómoda y fácil de expresar este tipo de cantidades conocida como "notación científica". Evidentemente, sería muy tedioso leer, recordar y escribir valores como los tratados, de tal forma que en este tipo de notación se evita esta serie de problemas al señalar las cantidades como el producto de un número con o sin decimal por una potencia de basé 10 [12]. Recordemos que cuando un número se eleva a un exponente, este nos indica las veces en que el número se multiplica por sí mismo, el cuál puede ser de signo positivo o negativo.

A continuación, en la Tabla IX se expresan algunas potencias de base 10 con exponentes positivos y negativos [11].

Tabla IX

Potencias de base 10 con exponentes positivos

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 10 \times 10 = 100$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\ 000$
$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\ 0000$
$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000000$

Como se observa, el número de ceros corresponde al exponente al que se eleva la base 10. Esto último indica que el valor de la masa del sol puede expresarse así: m_s = 1 991 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg = $1{,}991 \times 10^{30}$ kg.

Luego, en este método, cuando el exponente de la potencia de base 10 es negativo, el resultado es un número más pequeño que la unidad, tal como se muestra en la Tabla X [11].

Tabla X

Potencias de base 10 con exponentes negativos

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$10^{-2} = \frac{1}{10x10} = 0{,}01$
$10^{-3} = \frac{1}{10x10x10} = 0{,}001$
$10^{-4} = \frac{1}{10x10x10x10} = 0{,}0001$
$10^{-5} = \frac{1}{10x10x10x10x10} = 0{,}00001$

Se puede observar que en estos casos cómo el número de lugares que la coma decimal está corrida a la izquierda del digito 1 es igual al valor del exponente negativo. Esto último nos indica que la masa del electrón se puede escribir de la siguiente forma: m_e = 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 93 8 97 kg = 9,11 x 10^{-31}kg.

Se puede afirmar de los ejemplos anteriores que tanto la masa del sol como la del electrón están escritas en notación científica. En sí, de manera general, se puede decir entonces que cuando una cantidad o magnitud física se expresa como una potencia de base 10, multiplicada por un número entre 1 y 10, es que está escrita en notación científica.

Ejemplo 1.

Escriba en notación científica el decimal 0,0000000085.

Solución

Como se observa, la coma decimal de la cifra dada se encuentra a nueve espacios con respecto al primer digito diferente de cero de izquierda a derecha; en este caso es el 8, por tanto, el valor dado en notación científica queda expresado: 0,0000000085 = $8,5 \times 10^{-9}$.

Ejemplo 2.

Exprese 425 000 000 000 000 000 000 en notación científica.

Solución

Al contar el número de cifras, desde el primer digito que es 4, hasta el último 0, se encuentra que es 23; por tanto, la cifra anterior queda expresada en notación científica así: 425 000 000 000 000 000 000 = $4,25 \times 10^{23}$.

F. Cifras significativas

Las cifras significativas son de gran importancia, sobre todo, cuando se trabaja en el área de la experimentación. Esto en razón a que aportan la información de alta significancia real, determinada en el proceso de medición de alguna magnitud perteneciente al mundo de la física, de la química o de alguna otra área de conocimiento. Otro tipo de cifras que se conocen son las cifras no significativas, las cuales aparecen como resultado de los mismos cálculos realizados en el experimento y, al contrario de las primeras, no tienen significado alguno. Para determinar la cifra significativa del valor de una magnitud cualquiera esta se obtiene directamente del error incluido en la medida. Con el fin de aclarar en mayor detalle el asunto, se define la cifra significativa como cada una de las cifras o dígitos que se obtienen en una medición y que el operador está razonablemente seguro de obtener en el instrumento respectivo de medida que está utilizando [10]. En ellas se incluyen dígitos que se conocen con certeza, más un digito incierto [13]. La cifra significativa siempre ocupara una posición igual o superior al orden o la posición del error.

Así, por ejemplo, se considera una medida de longitud cuyo valor determinado fue de 234,6423 m con un error de 0,9 m. Se observa que el error es del orden de las décimas de metro. Lo anterior evidencia entonces que las cifras del número considerado que ocupan una posición menor que las décimas de metro (unidad de medida igual a la del error) no son significativas, es decir, no aportan información alguna. En verdad, qué sentido tiene expresar el número con una precisión de diezmilésimas de metro si el error es aproximadamente 1 metro. Las cifras significativas en el orden de mayor a menor serán las que ocupen la posición de las unidades de centenas, decenas, unidades y décimas de metro, pero no se incluirán los valores de centésimas, milésimas y diezmilésima de metros. Lo anterior nos lleva a concluir que el valor que se debe tomar de la medida realizada es de 234,6 m.

Siempre que se quiera expresar el valor de una medida debe evitarse la utilización de cifras no significativas, ya que introducirlas en la cantidad a registrar puede inducir al lector a confusión. Lo que se debe hacer es redondear los números de tal forma que la cantidad final tenga solo cifras significativas. El redondeo de datos consiste en eliminar las cifras no significativas.

Para redondear los datos se deben tener presentes las siguientes reglas [11]:

- Si la cifra a eliminar es mayor que cinco, se aumenta en una unidad la cifra anterior a su posición en el número.
- Si la cifra a eliminar es menor que cinco, la cifra anterior a ella no sufre cambio alguno.
- Si la cifra a eliminar es cinco, y el número anterior a él es par, este se deja igual, pero si el número anterior es impar se aumenta en una unidad.

Se puede decir que las dos primeras reglas de redondeo son de sentido común, pero la tercera surge de un análisis razonable, ya que, por lo general, la mitad de las veces redondeamos por defecto y la otra mitad por exceso.

En el proceso de redondeo, siempre que el número sea grande, las cifras eliminadas se deben sustituir por ceros. Por ejemplo, el número 5987, al redondearlo a una cifra significativa resulta 6000. Para este caso suele escogerse la notación exponencial, ya que si escribimos “6000” puede no estar claro para este caso si los ceros se consideran cifras significativas o no. En realidad, al escribir 6×10^3 queda claro que solo la cifra “6” es significativa, puesto que si los ceros también lo fueran se expresarían de la siguiente forma: $6{,}000\times10^3$.

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de afianzamiento del tema.

Ejemplo 1.

Redondear 24,378 a cuatro cifras significativas.

Solución

Para responder a lo pedido tendremos que eliminar el número 8, el cual es mayor que 5; por tanto, la respuesta sería: R/24,38.

Ejemplo 2.

Redondear 24,373 a cuatro cifras significativas.

Solución

Para este caso tenemos que la cifra a eliminar es el 3, el cual es menor que 5, luego, la respuesta es: R/24,37.

Ejemplo 3.

Redondear 24,375 a cuatro cifras significativas.

Solución

La cifra a eliminar es el 5. Observamos que la cifra anterior a él es 7, el cual es impar, entonces, de acuerdo con las reglas de redondeo, tendremos que nuestra cifra a redondear queda expresada así: R/24,38.

Ejemplo 4.

Redondear 24,325 a cuatro cifras significativas.

Solución

Al igual que en el "Ejemplo 3", la cifra a eliminar es el valor 5, pero su cifra anterior es 2, el cual es par, por tanto, si se tienen presentes las reglas de redondeo la respuesta es: R/24,32.

1) Reglas de interés en las cifras significativas

En el proceso de medición experimental y operacional de datos es importante que el experimentador conozca las reglas, las cuales le permitirán sacar con precisión las cifras significativas de los valores a registrar en su informe y evitar así confusiones. A continuación, se detallan las reglas de importancia [3]:

- *Regla 1.* Los datos experimentales se deben expresar con una sola cifra dudosa, indicando además con (±) la incertidumbre en la medida determinada.
- *Regla 2.* Toda cifra significativa se debe contar de izquierda a derecha a partir del primer digito diferente de cero, hasta el digito del cual se tiene duda.
- *Regla 3.* Cuando se suman o restan dos números decimales, la cantidad de decimales que debe llevar el valor resultante tiene que ser igual a la cifra del decimal operado inicialmente que presenta el menor número de cifras decimales.
- *Regla 4.* Cuando se multiplican o dividen dos números decimales, la cantidad de cifras decimales del resultado debe ser igual a las que presenta el término operado de menor número de cifras decimales.

Ejemplo 1.

Sumar la cifra 22,342 con 32,54.

Solución

Como se observa, la segunda cifra es la que presenta el menor número de decimales, por tanto, el resultado de la suma solo debe contener dos cifras decimales, así:

$$\begin{array}{r} 22{,}342 \\ +\ 32{,}54 \\ \hline 54{,}882 \end{array}$$

De acuerdo con este resultado, al sumar las cifras dadas el resultado fue 54,882, pero como solo deben quedar dos cifras decimales, según las reglas de redondeo de datos, el valor a tener en cuenta es: 22,342 + 32,54 = 54,88.

Ejemplo 2.

Multiplicar 12,5 con la cifra 3,47.

Solución

La primera cantidad es la de menor cifras decimales, por tanto, el resultado de la multiplicación solo puede expresarse con una cifra decimal: (12,5) x (3,47) = 43,375.

Al realizar la multiplicación de las cantidades se observa que el resultado contiene tres cifras decimales, y solo debemos tomar una, por tanto, al utilizar las reglas de redondeo de datos se obtiene la siguiente respuesta: (12,5) x (3,47) = 43,4.

Ejemplo 3.

Dividir 22,346 entre 4,52.

Solución

Al realizar la división correspondiente se obtiene: 22,346 ÷ 4,52= 4,9438.

Se observa que el resultado contiene cuatro cifras decimales. Sin embargo, de las cifras dadas para dividir vemos que una de ellas solo contiene dos cifras decimales, por tanto, al tener en cuenta las reglas para las cifras significativas y las de redondeo de datos el resultado final es: 22,346 ÷ 4,52= 4,94.

G. Teoría del error en la medición

La teoría del error nos aclara y recuerda que siempre que se realice una medición de alguna magnitud, sea esta física, química, biológica, etc., con algún aparato de medida, se debe tener presente que el resultado obtenido no es exacto por más preciso que sea el instrumento de medición o por más precavido y meticuloso que sea el operador. Por lo general, el valor obtenido en una medición no equivale al valor real de la magnitud que se mide, es decir, los resultados hallados en el proceso de medición son aproximados, a causa de la presencia del error experimental. Este último nos indica la máxima diferencia probable entre el valor medido y el real, y depende, sobre todo, de la técnica empleada [10].

1) Error experimental

Según [1], este siempre es inherente a la actividad de medición y su valor se puede estimar en el proceso. Se define como la diferencia entre el valor determinado experimentalmente de la magnitud y su valor verdadero [10]. Se considera como valor verdadero o real el especificado en la literatura formal (como, por ejemplo, en los textos), o los obtenidos por medio de técnicas muy rígidas y sofisticadas, etc. De lo expresado, la ecuación matemática que la define está dada por:

$$E_e = V_m - V_v \qquad (5)$$

Donde:

- E_e= representa el error experimental.
- V_m= representa el valor medido.
- V_v = representa el valor verdadero o real.

a) Tipos de errores experimentales

Dado que todas las medidas se ven afectadas de alguna manera por el error experimental, debido a causas, como, por ejemplo, las imperfecciones inevitables en el instrumento de medida o las limitaciones impuestas por nuestros sentidos (visión, audición) que deben registrar la información etc. [5], [14], el hombre de ciencia los clasifica en dos categorías bien definidas: errores sistemáticos y errores aleatorios o accidentales.

Los errores sistemáticos tienen algo muy particular, y es que se pueden evitar, además de corregir. Se generan debido a diversas circunstancias que afectan de forma directa los resultados en la medida, de modo que crean una desviación que no corresponde con los valores reales o verdaderos de la magnitud a medir. Se les denomina "sistemáticos" porque aparecen por causas intrínsecas propias del sistema (operador, equipos, instrumentos de medición, literatura, etc.), y no a causa de eventos externos aleatorios [1], [5], [14]. Siempre que se presentan se obtienen valores más altos o más bajos que el valor real.

Los errores sistemáticos, por lo regular, aparecen en las mediciones en razón a los siguientes aspectos:

- Utilización de hábitos inadecuados en la forma de realizar el experimentador su observación.
- Instrumento de medida empleado en la medición mal calibrado o con defecto.
- Condiciones inadecuadas del medio ambiente en el que se realiza la medición.

- Empleo en las fórmulas matemáticas utilizadas de valores de constante que no corresponden al medio en el que se realizaron las mediciones y los cálculos.

La manera en que el error sistemático se puede evitar o corregir es eliminar la fuente generadora, o si se realiza la corrección respectiva en el resultado.

Por su parte, los errores aleatorios aparecen, por lo general, debido a una gran cantidad de perturbaciones independientes y fluctuantes que generan discrepancias (valores distintos) en las repeticiones experimentales que se realicen de una misma medición [2]. Las causas que los generan se deben a la variación de presión, de humedad y de temperatura del ambiente sobre los instrumentos [14]. Siempre se encuentran presentes en las mediciones y, en ausencia de los errores sistemáticos, son los culpables de que en las mediciones sucesivas de una magnitud de medida los valores obtenidos sean totalmente diferentes al valor verdadero de la magnitud. Este tipo de errores se pueden estimar por métodos estadísticos. Sin embargo, no se pueden eliminar, ya que en cualquier medición se hace imposible establecer el valor real de la magnitud medida. Si se ignora este valor, es inviable la aplicación de la ecuación para obtener el valor del error.

2) Incertidumbre experimental

En la medida en que tanto la ciencia como la tecnología se desarrollan de manera mutua, con estos avances se crean de manera progresiva nuevos métodos e instrumentos de medidas mucho más precisos. Todo lo anterior ha permitido disminuir el error en las mediciones y, por tanto, obtener valores más aproximados correspondientes realmente a las magnitudes medidas. Sin embargo, dichos avances no han eliminado por completo los errores ni han creado un método efectivo para calcularlos. Lo único que se puede determinar en la actualidad es la incertidumbre experimental, la cual se define como el valor del error probable que puede tener el error experimental [1]. El conocimiento de este último es muy importante a fin de estar en capacidad de determinar el intervalo y sus valores límites dentro de los que se está seguro de encontrar la cifra real de una medición [7]. Por ejemplo, si se encuentra que el largo del marco de la ventana del salón de clases se expresa por la ecuación:

$$L = (94,2 \pm 0,1) \text{ cm}$$

La expresión anterior nos indica que el valor más probable del largo de la ventana es de 94,2 cm; sin embargo, debido a la presencia del error en toda medida, el valor verdadero de L está entre los valores extremos 94,3 cm y 94,1 cm, los cuales resultan de sumarle o restarle la incertidumbre experimental al valor más probable del largo de la ventana. Ahora supongamos que conociéramos el valor real del largo de la ventana y que fuera de 94,25 cm; se puede verificar que este valor se encuentra entre los valores límites del intervalo de incertidumbre (94,1, 94,3).

b) Tipos de incertidumbre

Siempre que se realice una medida repetitiva de una magnitud física cualquiera en las mismas condiciones, a pesar de la presencia del error experimental, se sabe que siempre existirá la posibilidad de que los resultados obtenidos en cada uno de los datos arrojados en las mediciones sean diferentes o iguales. Por tanto, de acuerdo con estos criterios la incertidumbre experimental se clasifica en incertidumbre de medida no reproducible e incertidumbre de medida reproducible [1].

La incertidumbre de medidas no reproducibles se tiene en cuenta cuando se repite la medida de una misma magnitud en iguales condiciones y los resultados obtenidos en cada una de las medidas generalmente sean diferentes [1]. En este caso se hace imposible decidir cuál de los datos arrojados corresponde al valor real de la magnitud medida, y ante esta situación un poco compleja de decidir cuál es el valor que se debe reportar y su incertidumbre asignada, se deben realizar los procedimientos detallados a continuación para responder a la pregunta.

Se halla la media aritmética ($\overline{X}$) de los valores obtenidos en las medidas realizadas como valor representativo y más probable de la magnitud a medir, la cual se determina por medio de la siguiente expresión [14], [15]:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \cdots + X_n}{n}$$

Donde cada uno de los términos $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ simboliza un valor obtenido de la magnitud medida *X*, *n* representa el número de datos obtenidos y $\overline{X}$ es la media aritmética, es decir, el valor más probable de todos los datos arrojados de las medidas *X*.

- Ahora, se determina la desviación absoluta máxima (d_{am}), la cual representará en este caso a la incertidumbre y que se define como la diferencia absoluta entre la media aritmética y el máximo valor entre los datos obtenidos en las mediciones. De acuerdo con [1], [14] y [15], la expresión matemática que la representa esta dada por:

$$d_{am} = X_{max} - \overline{X} \qquad (6)$$

Donde $\overline{x}$ es la media aritmética de los datos obtenidos en las medidas realizadas; X_{max} es el máximo valor de las lecturas determinadas, y d_{am} es la desviación absoluta máxima.

- Conocida la media aritmética y la desviación absoluta máxima, las cuales representan el valor más probable y la incertidumbre de la magnitud a medir, respectivamente, encontramos con sus valores el intervalo donde se encuentra el valor real o verdadero de la magnitud a través de la siguiente expresión, la cual se deduce de la ecuación anterior:

$$X = \overline{X} \pm d_{am}$$

Por ejemplo, en la Tabla XI se muestran los datos de las distancias que recorre un atleta en diversas oportunidades, y bajo las mismas condiciones físicas en un tiempo fijo por partida de dos segundos.

Tabla XI

Distancia recorrida por un atleta

Tiempo(s)	**N.º de partida**	**Distancia(m)**
2	1	4,0
2	2	3,92
2	3	4,3
2	4	3,86
2	5	3,90
2	6	4,2

Así, entonces, la distancia más probable del atleta la obtendremos del cálculo de la media aritmética de los datos registrados en la tabla, así:

$$\overline{X} = \frac{(4.0+3.92+4.3+3.86+3.90+4.2)m}{6}$$

Es decir, el promedio de la distancia recorrida por el atleta es igual a $\overline{X}$= 4,03m

Ahora, como se observa en la Tabla XI, el mayor valor de todas las cifras de distancias registradas en ella es 4,3 m, es decir: X_{max} = 4,3 m.

Al tomar los valores conocidos de la media aritmética y la distancia máxima podemos determinar el valor de la desviación absoluta máxima, así: dam = (4,3 - 4,03)m = 0,27 m.

El resultado anterior nos muestra que el valor de la incertidumbre en la medida es de 0,27 m, ya que la desviación absoluta máxima la representa. También la d_{am} es un indicador de la precisión en la medición.

Finalmente, la expresión que nos permite determinar el intervalo de valores en el que se encuentra el valor real de la distancia que recorre el atleta en dos segundos está dada por X = (4,03 ± 0,27) m.

En cuanto a la incertidumbre de medidas reproducibles, se tendrá presente cuando el experimentador, en las mismas condiciones físicas, realice varias veces la medición de una magnitud y los valores obtenidos en cada una de ellas sea el mismo, a pesar de la presencia del error experimental [1]. Esto es un indicativo de que la variación en los valores de medida no excede la mitad de la mínima escala del instrumento de medición. A manera de aclaración se puede decir que, una vez se realice una serie de mediciones directas y se obtenga siempre un mismo valor para la magnitud medida, a dicha lectura —la cual representa el valor más probable de la magnitud a medir— se le asocia la incertidumbre conocida como “la incertidumbre relativa”, la cual determina el grado de significancia que tiene el valor de la incertidumbre absoluta.

Así, si se mide varias veces la longitud de un objeto específico con una cinta métrica graduada en milímetros, y se obtiene que su valor fue de L= 421 mm, no se puede afirmar la inexistencia del error en la medición o que la incertidumbre absoluta es cero, ya que los errores quedan ocultos cuando son mucho menores que la incertidumbre asociada a la cinta métrica (la cual sería δL= ± 0,5 mm.) De esta manera, el resultado final se debe expresar L = (421 ± 0,5) mm.

El resultado anterior nos indica que el valor real de la longitud del objeto se encuentra entre 420,5 mm y 421,5 mm. Además, dado que la mayoría de los fabricantes de instrumentos de medición, por lo general, garantizan que estos se diseñen y construyan de tal forma que la incertidumbre absoluta que puedan introducir en él no sea mayor a la mitad de la división más pequeña de la escala del aparato con que se toman las lecturas, esto nos lleva a aceptar como muy viable tomar el valor de la incertidumbre absoluta igual a la mitad de la mínima escala de medida. Así, si se mide varias veces la masa de un alfiler en una balanza cuya mínima escala es del orden de los 0,1 g, se encuentra que el valor obtenido siempre es de 2,4 g; entonces, la incertidumbre absoluta (δm) de la masa asociada es de 0,05 g (ya que la mínima escala de la balanza es de décimas de gramo), y el resultado estaría dado así: m = (2,4 ± 0,05) g.

Encontramos aquí que el resultado de toda medición está integrado por un número que representa el valor más probable de la magnitud, la unidad y un indicador de la precisión de la medición. Este indicador está representado en este caso por la incertidumbre absoluta, la cual se considera como un factor determinante de la precisión en la medida que define los límites de confianza (99%) dentro de los que se está seguro de que el valor real se encuentra en dicho intervalo.

De igual manera, dentro de los indicadores de precisión en la medición encontramos también la incertidumbre relativa, la cual —como se señaló— determina el grado de significancia que tiene el valor de la incertidumbre absoluta. Según [14] y [15], la expresión matemática que representa este tipo de incertidumbre, que se define como la razón existente entre la incertidumbre absoluta y el valor más probable de la magnitud medida, está dada por:

$$I_r(x) = \frac{\delta X}{X_m}$$

Donde,

- $I_r(x)$: representa la incertidumbre relativa de la mgnitud x.
- X_m: representa el valor más probable de la magnitud medida.
- δX: representa la incertidumbre absoluta.

Como se puede deducir de la ecuación de incertidumbre relativa, esta es una magnitud de tipo adimensional, es decir, solo se representa por un valor. El siguiente ejemplo ilustra en detalle lo concerniente a la incertidumbre relativa.

Ejemplo 1.

En el laboratorio con una regla graduada se midió inicialmente la altura del mesón donde se llevan a cabo los experimentos, y se determinó que esta es de h = (110 ± 0,05) cm. Luego se midió la longitud de un alfiler y se obtuvo el siguiente resultado: L = (3,2 ± 0,05) cm. Determine la mínima graduación del instrumento de medida utilizado y la incertidumbre relativa para cada una de las medidas.

Solución

La mínima graduación del instrumento de medida nos proporciona el valor de la incertidumbre absoluta estipulada en cada una de las medidas registradas en el problema, y esta debe ser de 0,1 cm, ya que al dividir este valor por dos el resultado es de 0,05 cm.

A fin de determinar la incertidumbre relativa para cada una de las medidas se hace uso de la ecuación:

$$\mathrm{I_r(x)} = \frac{\delta X}{X_m} \tag{7}$$

Para la altura del mesón, tendríamos que

$$I_r(h) = \frac{\delta h}{h_m} = \frac{0{,}05cm}{110cm}$$

Así, al simplificar las unidades de medida y dividiendo valores, se obtiene que la incertidumbre relativa de la altura del mesón es $I_r(h) = 0{,}00045\mathrm{cm}$

Entonces, la incertidumbre relativa para la longitud del alfiler sería:

$$I_r(L) = \frac{\delta L}{L_m} = \frac{0{,}05cm}{3{,}2cm}$$

Es decir,

$$I_r(L) = 0{,}016\mathrm{cm}$$

Se puede observar en los resultados anteriores que la incertidumbre relativa de la altura es mucho menor que la de la longitud, lo que significa que la incertidumbre absoluta (0,05 cm) no es tan significativa en la medida de altura como en la medida de longitud.

A menudo es común en la medición hacer uso de la incertidumbre porcentual, la cual permite ser más específico en la precisión de la medida. Según [14] y [15], esta se define como el producto entre la incertidumbre relativa y el 100%, y se expresa así: $I_x(\%)=I_r(x)(100\%)$. Donde,

- $I_x(\%)$: representa la incertidumbre porcentual de la magnitud x.
- $I_r(x)$: representa la incertidumbre relativa de la magnitud x.

Ahora, si determinamos la incertidumbre porcentual de la altura del mesón y la de la longitud del alfiler tendríamos los siguientes resultados para cada una de ellas:

$$I_h(\%)\ I_r(h)(100\%) = (0{,}00045)\ (100\%) = 0{,}045\%$$

$$I_L(\%)\ I_r(L)(100\%) = (0{,}016)\ (100\%) = 1{,}6\%$$

Los resultados anteriores nos permiten expresar la altura del mesón y la longitud del alfiler de la siguiente forma,

$$h = (110 \pm 0{,}045\%)\ \text{cm}$$

$$L = (3{,}2 \pm 1{,}6\%)\ \text{cm}$$

Se le recuerda al lector la importancia que tiene la adquisición de las habilidades o competencias que le permitan determinar la incertidumbre en la medición para valores de datos reproducibles o no reproducibles, al igual que el intervalo de probabilidad en el que se encuentra el valor real de la magnitud a medir. Apropiarse de dicho conocimiento será de mucha utilidad porque durante el desarrollo del curso se tendrá la oportunidad de realizar experiencias de laboratorio en las que aparecerán los dos tipos de problemas. Además, se podrá comprobar que los valores de magnitudes conocidas y reportadas en la literatura (textos) seguramente no corresponderán a los valores más probables hallados de ella en las experiencias, pero que dicho valor sí se encuentra incluido en el intervalo de valores determinado.

H. Resumen

A continuación, se sintetizan aspectos relevantes de la unidad en los siguientes puntos:

- *Magnitud física*. Es cualquier propiedad o característica de los cuerpos que se pueda medir, se clasifican en magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas. Las magnitudes fundamentales son independientes de cualquier otra magnitud, mientras que las derivadas dependen de otras.

- *Medición.* Proceso mediante el cual se compara un patrón de medida o unidad de medida con un objeto, propiedad o atributo. Se clasifican en mediciones directas e indirectas. Las primeras se realizan por medio de instrumentos de medida, y las segundas por medio de fórmulas o algunas medidas ya establecidas.
- *Conversión de unidades.* Es un proceso mediante el cual se transforma el valor numérico de una magnitud física, expresada en una unidad de medida, en otro valor numérico equivalente y expresado en otra unidad de medida de la misma naturaleza.
- *Análisis dimensional.* Herramienta conceptual que permite comprender los diferentes fenómenos físicos que se presentan e involucran una combinación de diferentes cantidades físicas.
- *Notación científica.* Forma recurrente de los científicos de escribir números muy grandes o muy pequeños de manera convencional.
- *Cifras significativas.* Son de gran importancia cuando se trabaja en el área de la experimentación, ya que aportan la información de alta significancia real determinada en el proceso de medición de alguna magnitud perteneciente al mundo de la física o de otras áreas de conocimiento en las que la experimentación es muy importante.

Las reglas importantes en el redondeo de datos son:

- Si la cifra a eliminar es mayor que 5, se aumenta en una unidad la cifra anterior a su posición en el número.
- Si la cifra a eliminar es menor que 5, la cifra anterior a ella no sufre cambio alguno.
- Si la cifra a eliminar es 5, y el número anterior a él es par, este se deja igual, pero si el número anterior es impar se aumenta en una unidad.

A continuación, se sintetizan otros aspectos relevantes de la unidad en los siguientes puntos:

- *Teoría del error.* La teoría del error nos dice que siempre que se realice una medición de alguna magnitud, bien sea esta física, química, biológica, etc., con algún aparato de medida, se debe tener presente que el resultado obtenido no es exacto.

- *Error experimental.* Este siempre es inherente a la actividad de medición y su valor se puede estimar en el proceso. Se define como la diferencia entre el valor determinado experimentalmente de la magnitud y su valor verdadero: $E_e = V_m - V_v$. Los errores experimentales se clasifican en errores sistemáticos y aleatorios. Los primeros, debido a su naturaleza, se pueden evitar, mientras que los segundos no, debido a lo complejo de las mediciones.
- *Incertidumbre experimental.* Es el valor del error probable que puede tener el error experimental. Se clasifican en incertidumbre de medidas no reproducibles y reproducibles.
- *Incertidumbre relativa.* Determina el grado de significancia que tiene el valor de la incertidumbre absoluta:

$$I_r(x) = \frac{\delta X}{X_m}$$

Donde:

- $I_r(x)$: representa la incertidumbre relativa de la magnitud x.
- X_m: representa el valor más probable de la magnitud medida.
- δX: representa la incertidumbre absoluta.

- ► *Incertidumbre absoluta para datos reproducibles.* Cuando se trabaja con este tipo de datos es aceptable tomar el valor de la incertidumbre absoluta igual a la mitad de la mínima escala de la medida del instrumento con el que se mide.
- ► *Incertidumbre porcentual.* Se define como el producto entre la incertidumbre relativa y el 100%, es decir $I_x(\%)=I_r(x)(100\%)$, donde *Ix* representa la incertidumbre porcentual.

I. Ejercicios de aplicación

1) Problemas de conversión de unidades

a. A cuantos cm equivalen 34,56 m.
b. El médico de María le dice que su masa es de 52 000 gr. ¿Cuál es la masa de María en kg?
c. El perímetro de un rectángulo es de 345 mm. ¿A cuántos metros equivale este perímetro?

d. ¿A cuántos miriámetros equivalen 23,586 cm?
e. La distancia entre dos ciudades A y B es de 8,6 km. ¿A cuánto equivale esta distancia en pulgadas, en pies y en millas?
f. Un rectángulo tiene de altura h = 30 cm, y de base b = 20 cm. Calcula su área en m^2, km^2, mm^2, y dm^2.
g. Una persona emplea un tiempo de 2 minutos en dar una vuelta al parque de su barrio, ¿a cuánto equivale este tiempo en segundos y en horas?
h. Juan tiene una masa de 60 kg y quiere saber a cuánto equivale su masa en libras y en gramos. Ayúdale a responder su interrogante.
i. La rapidez de un automóvil es de V = 10m/s. Encuentra a cuánto equivale esta rapidez en cm/s, km/h, y en mm/s.
j. Un camión tiene una magnitud de aceleración igual a $8m/s^2$, ¿a cuánto equivale esta magnitud de aceleración en cm/s^2, km/h^2, y en mm/s^2?

2) Problemas de análisis dimensional

a. Conociendo que el trabajo en física se define como el producto punto entre la fuerza y el vector de desplazamiento, es decir $w = \vec{f} \circ \vec{d}$, ¿cuáles son las dimensiones del trabajo?
b. Matemáticamente, el torque se define como el producto cruz entre el vector llamado "brazo de palanca" y la fuerza que aplica, es decir, ($\vec{T} = \vec{r} \times \vec{f}$). De acuerdo con la fórmula anterior determine las dimensiones del torque.
c. De la ecuación del movimiento uniforme (velocidad constante) se obtiene que la velocidad está dada por: ($\vec{v} = \vec{d} / t$), ¿cuáles son las dimensiones de $\vec{v}$?
d. La potencia se define como el cociente entre el trabajo y el tiempo en que se realiza este, es decir, P = E / t. Con base en esta ecuación determine las dimensiones de la potencia.
e. La Segunda Ley de Newton para cuerpos que no cambian su masa durante el tiempo de su observación, expresa que $\vec{a} = \vec{f} / m$. Determine las dimensiones de la aceleración por medio de la expresión matemática.
f. Determine las dimensiones de la fuerza si $\vec{f} = m\vec{a}$.
g. Determine las dimensiones de la presión si $p = \vec{f}/A$, donde p = presión, $\vec{f}$ = fuerza, A = área.
h. Determine las dimensiones de la cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$, con m = masa, y $\vec{v}$ = velocidad.

i. Determine las dimensiones del impulso, si I = f · t.
j. Determine las dimensiones de la frecuencia angular w = v/r.

3) Problemas de notación científica

a. Escribir el decimal 0,00000000000756 en notación científica.
b. Exprese el valor 274 000 000 000 000 000 en notación científica.
c. Los valores de los lados de un terreno rectangular son L_1= 20 km y L_2= 30 km. Determine su área en m^2 y exprésela en notación científica.
d. La distancia de separación entre dos átomos es de 0,00000000000001 m. Exprese este valor en mm, y escríbala en notación científica.
e. La distancia de separación entre dos ciudades es de 84,600 km, exprese esta distancia en mm y escríbala en notación científica.
f. La rapidez con que se mueve un electrón expresada en millas/s es de 54000 milla/s. Exprese su rapidez en mm/s y escríbala en notación científica.
g. La rapidez de la luz se estima en v = 300 000 km/s en el vacío, exprese esta rapidez en cm/s y escríbala en notación científica.
h. El valor h = 662 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 J.s, donde *h* se conoce como la constante de Planck. Escribe la constante en notación científica.
i. La constante de Boltzman vale k = 0,138000000000000000000000J/k. Expres este valor en notación científica.
j. La energía E_e=0,8190000000000000 J se conoce como la energía en reposo del electrón. Exprésela en notación científica.

4) Problemas de cifras significativas

a. Redondear el decimal 45,865 a cuatro cifras significativas.
b. Redondear el decimal 368,354 a cinco cifras significativas.
c. Redondear el decimal 186,9875 a seis cifras significativas.
d. Redondear el decimal 4365,4529 a siete cifras significativas.
e. Sumar el decimal 45,573 con 25,859, y, de acuerdo con la regla de la suma de datos para determinar la cifra significativa del resultado, encuentre su cifra significativa.
f. Según la regla de la multiplicación de términos decimales para determinar la cifra significativa del resultado, multiplique 34,6754 con 45,75 y encuentre la cifra significativa del producto.

g. Dividir el valor decimal 642,867 entre 240,82, y, de acuerdo con la regla de cifras significativas para la división de términos decimales, encuentre la cifra significativa del cociente.
h. Las dimensiones de los lados de un lote en forma rectangular son: L_1=34,67m y L_2 = 675,3562. Determine las cifras significativas del área del lote.
i. En el movimiento uniforme de un automóvil se encontró que la distancia recorrida por este fue de 56,893 m, en un tiempo de 3,56 s. Determine las cifras significativas de la rapidez del automóvil.
j. Un tendero vende dulces a 2 pesos con 56 centavos, y caramelos a 1 peso con 4 centavos. Si vende tres dulces y siete caramelos, determine las cifras significativas del costo total de los dulces y de los caramelos.

5) Problemas de incertidumbre experimental

a. En la Tabla XII se muestran los valores obtenidos por varios estudiantes de un colegio de la distancia que separa los dos arcos de la cancha de microfutbol de su institución:
   - Determine el intervalo de valores en el que se encuentra el valor real de la distancia que separa los dos arcos de micro futbol.
   - Determine la incertidumbre experimental.

Tabla XII.

Distancia obtenida por los estudiantes

Nombres	Valor obtenido en metro
Juan	50,23
Carlos	50,25
Elías	50,28
Leo	50,20
Diana	50,30
Félix	50,29

b. Un total de seis estudiantes de un salón de clase fueron elegidos para medir el tiempo que empleaba una pelota que se dejaba caer desde la parte de arriba de un plano inclinado para llegar al piso, siendo las condiciones físicas del medio y de caída de la pelota las mismas para cada intento. En la Tabla XIII se muestran los datos obtenidos por los estudiantes.

Tabla XIII.

Tiempo obtenido por los estudiantes

Nombres	Valor obtenido en seg.
Leo	3,86
José	3,86
Elías	3,86
Félix	3,86
Carlos	3,86
Simón	3,86

¿Cuál es el intervalo de valores en el que se encuentra el valor real del tiempo empleado por la pelota en llegar al piso? ¿Cuál es la incertidumbre absoluta del tiempo asociado?

c. Se quiere medir por parte de ciertos estudiantes la rapidez de impacto de una pelota que se deja caer de una altura de 4 m y desde el reposo. Los datos obtenidos por los estudiantes en las mismas condiciones físicas de la rapidez de la pelota en m/s se muestran en la siguiente Tabla XIV.

Tabla XIV.

Rapidez medida por los estudiantes

Estudiante	Valor de rapidez (m/s)
Número 1	9, 25
Número 2	9,26
Número 3	9,28
Número 4	9,10
Número 5	9,15
Número 6	9,27

Determinar la incertidumbre en la medida y el intervalo de valores en el que se encuentra el valor verdadero de la rapidez de impacto de la pelota.

d. Se mide la longitud de un marcador y se encuentra que vale L = 9,2 cm:
   - ¿Cuál es la incertidumbre asociada al instrumento de medida?
   - ¿Cuál es el intervalo de valores en el que se encuentra el valor real del marcador?

e. La longitud registrada del largo de un lápiz es de L= 10,26 cm, cuando no se tuvo en cuenta la incertidumbre asociada al instrumento:
   - ¿Cuál es la incertidumbre que se tiene que asociar al instrumento de medida?
   - ¿Cuál sería el intervalo de valores donde se encuentra el valor real de la longitud del lápiz?

f. La Tabla XV muestra las medidas del periodo de oscilación de un péndulo que obtuvieron varios estudiantes en una de sus experiencias.

Tabla XV.

Periodo de oscilación péndulo

Estudiante	Valor del periodo (s)
Número 1	4, 0
Número 2	3,26
Número 3	4,1
Número 4	3,9
Número 5	3,82
Número 6	4,21

   - Determinar el intervalo de valores de tiempo en el que se encuentra el valor real del periodo del péndulo.
   - La incertidumbre en la medida y el valor más probable del periodo.

g. En la Tabla XVI se muestran los datos de las distancias que recorre un atleta, en diversas oportunidades y bajo las mismas condiciones físicas, en un tiempo fijo por partida de cuatro segundos.

Tabla XVI.

Distancia en metro recorrida por el atleta

Tiempo(s)	No de partida	Distancia(m)
4	1	22,0
4	2	21,89
4	3	20,98
4	4	22,2
4	5	20,76
4	6	21,57

h. Calcular la distancia más probable recorrida por el atleta y el intervalo de valores en el que se encuentra el valor real recorrido por él en el tiempo de cuatro segundos.

i. La Tabla XVII muestra las medidas del periodo de oscilación de un péndulo que obtuvieron varios estudiantes en una de sus experiencias.

Tabla XVII.

Periodo de oscilación del péndulo

Estudiante	Valor del periodo (s)
Número 1	2,0
Número 2	2,0
Número 3	2,0
Número 4	2,0
Número 5	2,0
Número 6	2,0

j. Calcular el periodo más probable empleado por el péndulo y la incertidumbre en la medida.

k. Con una regla graduada se tomaron las medidas de la base del tablero de clase y se obtuvo $L_T = (200 \pm 0,05)$ cm. Luego se midió la longitud de un marcador y se encontró que $L_M = (12 \pm 0,05)$ cm. ¿Determine la mínima graduación del instrumento de medida utilizado y la incertidumbre relativa para cada una de las medidas?

l. Con un cronómetro se tomó el tiempo que empleaba una tortuga en recorrer cierta distancia y se obtuvo $t_T = (100 \pm 0{,}005)$ s. Luego se midió el tiempo que empleaba un atleta en recorrer otra distancia y se determinó que $t_A = (5000 \pm 0{,}005)$ s. ¿Determine la mínima graduación del instrumento de medida utilizado, la incertidumbre relativa y la incertidumbre porcentual para cada una de las medidas?

Referencias

[1] C. Gutiérrez, "Las mediciones en la física", en *Física general*, J. Rodriguez y L. A. Valdez, Eds. Mexico: McGraw Hill, 2009, pp. 14-28.

[2] D. E. Roller. y R Blum, "Descripción de la realidad física", en Mecánica, ondas y termodinámica, J. de la Rubia y J. Aguilar, Eds. 1ª ed. Barcelona: Reverté S. A., 1983, pp. 2-8.

[3] R. Serway, "Física y medición", en *Física*, G. Nagore, E. Cruz y J. Brenes, Eds., 4ª ed., Mexico: McGraw Hill, 1997, pp. 4-15.

[4] S. Gartenhaus, "Las cantidades físicas y su medición", en *Física 1. Mecánica,* A. Contin, Ed., 1ª ed. México: N. E. Interamericana, 1979, pp. 3-10.

[5] M. Alonso y E. J. Finn, "Mediciones y unidades", en *Física volumen I: mecánica,* C. Hernandez, V. Latorre y J. Herkrath, Eds. Wilmington EE. UU.: Addison-Wesley Iberoamericana S.A, 1986, pp. 15-25.

[6] L. Vargas, "Magnitudes y sistemas de unidades", en *Física Fundamental,* G. Solano y J. C. Serna, Eds., 1ª ed. Barranquilla: Prisma Publicación, 1991, pp. 4-6.

[7] D. C. Giancoli, "Sistemas de medida", en *Física para Ciencias e Ingenierías,* R. Fuerte, Ed., 4ª ed. México: Pearson Educación, 2008, pp. 3-14.

[8] F. P. Beer, E. R. Johnston y E. R. Eisenberg, "Introducción", en *Mecánica Vectorial para ingenieros: estática*, R. A. del Bosque y P. E. Roig, Eds. 8ª ed., México: McGraw Hill, 2007, pp. 2-13.

[9] P. A. Tipler, "Introducción", en *Física*, J. Aguilar y J. de la Rubia, Eds. 1ª ed., Barcelona: Reverté S. A., 1977, pp. 5-10.

[10] F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman, "Unidades, cantidades físicas y vectores", en *Física Universitaria*, J. Aguilar y J. de la Rubia, Eds., vol. I, 11ª ed. México: Pearson Educación, 2004, pp. 5-13.

[11] F. Bueche, "Descripción de las mediciones", en *Fundamentos de Física I,* G. Zetina, A. R. Ortiz y R. Barbosa, Eds., 3ª ed., Mexico: McGraw Hill, 1984, pp 2-8.

[12] P. A. Tipler y G. Mosca, "Sistemas de medida", en *Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica*, A. Bramón y J. Casas, Eds., 5ª ed. Barcelona: Reverté, S.A., 2006, pp. 3-13.

[13] J. D. Wilson, A. J. Buffa y B. Lou, "Mecánica", en *Física*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds., 6ª ed., México: Pearson Educación, 2007, pp. 1-17.

[14] H. Pérez, "Unidades y medición," en *Física general*, J. Callejas y A. Sámano, Eds., 1ª ed., México: Grupo Editorial Patria, 2015, pp. 27-30.

[15] A. M. Sanchéz, "Conocimientos generales", en *Física: guía para el estudiante*, J. E. Villa y E. Parada, Eds., 1ª. ed., México: Academia Institucional de Física, 2010, pp. 10-14.

Unidad 2

Magnitudes físicas

Resumen

En esta unidad, además de ilustrar de manera clara y concisa los conceptos fundamentales de las denominadas “magnitudes escalares y vectoriales”, se exponen las diferencias entre ellas (muy marcadas, por cierto). Por otra parte, el lector tiene la oportunidad de encontrar las matemáticas suficientes que le permitan avanzar en el estudio de los escalares y los vectores, como, por ejemplo, la suma, la resta o el producto punto y el producto cruz entre estos últimos. De igual manera, se presentan en este apartado otros temas importantes tales como la dimensión de vectores, la representación gráfica y algebraica vectorial de un vector o las operaciones entre escalares y vectores.

Palabras clave: magnitud escalar, magnitud vectorial, operaciones matemáticas, representación algebraica, representación gráfica.

A. Introducción

En el mundo de las matemáticas encontramos los llamados "espacios vectoriales y escalares". En cada uno de estos espacios se encuentran definidas unas leyes claras y concisas que, si bien difieren en ciertos aspectos, son las encargadas de etiquetar a los entes matemáticos (escalares y vectores) que cumplen o no con sus normas. En sí, cada una de sus reglas determina la pertenencia y no pertenencia de los espacios en referencia con cualquier objeto matemático. De igual manera, en el campo de la física existen observables físicos que difieren en ciertas características, lo cual ha conllevado a enmarcarlas en dos grupos de magnitudes: magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Cada uno de estos observables pertenecientes a la física cumplen con las reglas establecidas en los espacios tratados al comienzo del párrafo, lo que permite determinar a cuál de ellos pertenecen.

B. Magnitudes escalares y vectoriales

Muchos de los observables físicos que se tratan en el campo de la física requieren de tan solo un valor y de su unidad de medida para especificarla. Sin embargo, existen otros que para ser determinados por completo necesitan, además del valor y de la unidad de medida, una dirección y un sentido. Lo anterior conllevó inscribir a cada uno de los observables físicos conocidos, de acuerdo con estas características, en dos grupos de magnitudes: magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.

1) Magnitudes escalares

Son aquellas que solo necesitan de un valor y de una unidad de medida para quedar por completo especificadas, es decir, en estas no se necesita nombrar los observables físicos conocidos como "dirección" y "sentido" [1], [2], [3]. Como ejemplo de este tipo de magnitudes tenemos: la masa, la longitud, el tiempo, la temperatura, el trabajo, la energía, etc. Así, si medimos por medio de una balanza la masa de una manzana y encontramos que es de 0,05 kg, este valor, con su correspondiente unidad de masa, se define plenamente y no se necesita adicionarle otro tipo de característica. De igual manera ocurre para las otras magnitudes escalares mencionadas.

2) Magnitudes vectoriales

Este tipo de magnitudes quedan plenamente especificadas cuando, además de su valor numérico y de la unidad de medida utilizada, se le adiciona una dirección y un sentido [3], [4], [5], [6]. Esta última para vectores en el espacio la definen los tres ángulos de dirección del vector, los cuales en un sistema de coordenadas cartesianas son los que se miden, respectivamente, desde cada uno de los lados positivos de los ejes que componen el sistema hasta el punto de ubicación del vector. De manera particular en un sistema bidimensional (plano), a fin de especificar la dirección del vector solo se necesita conocer uno de sus ángulos de dirección.

Algunos de los observables físicos pertenecientes a este tipo de magnitudes vectoriales son: el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el torque, la cantidad de movimiento, etc. Por ejemplo, si nos dicen que un automóvil se mueve en dirección norte con rapidez de 10 m/s, y nos piden que determinemos su velocidad, esta última quedará definida si consideramos un plano cartesiano en el cuál el eje positivo de las x represente el Este, y su parte negativa el Oeste. Asimismo, la parte positiva del eje y represente el Norte y su parte negativa el Sur. Si se tiene en cuenta esto en relación a cómo se determina el ángulo de dirección de un vector, es posible concluir que el ángulo de dirección de la velocidad del automóvil es de 90º. Luego, dado que se tiene el valor de la magnitud del vector velocidad que es su rapidez, al igual que su dirección, se concluye que la velocidad del automóvil está plenamente determinada tanto analítica como matemáticamente.

Es muy común y necesario que las magnitudes vectoriales se representen por medio de expresiones matemáticas definidas como vectores, sobre todo, cuando se quiere realizar análisis de operaciones entre ellos. Los vectores en sí son entes matemáticos que se componen de una dirección, un módulo (valor) y un sentido. Por lo general, se simbolizan con letras mayúsculas a las que por encima se les coloca una flecha ($\vec{V}$). También es muy normal representarlos por letras en negrillas (V) [7], [8]. Según [9], el valor o módulo de una magnitud vectorial se simboliza por la letra que representa al vector sin la flecha (v) o el vector entre dos líneas perpendiculares paralelas $|\vec{V}|$.

a) Representación gráfica y algebraica vectorial de un vector

Según [10], al dibujar un vector siempre se traza una línea con punta de flecha, en la cual la longitud de la línea indica la magnitud del vector y su dirección es la dirección de éste. En sí, los vectores se pueden representar por medio de gráficas (geométricamente) y en notación matemática del tipo algebraica vectorial (fórmula). Por conveniencia, en la física para la representación gráfica del vector se hace necesario definir un sistema de coordenadas en la que pueda inscribirse la magnitud escalar del vector (el número de unidades contenidas en él), y su dirección. De esta representación se puede determinar matemáticamente el vector. La operación recíproca también se puede dar, es decir, al tener el vector expresado de forma algebraica vectorial este se puede representar gráficamente. Lo anterior es de gran importancia cuando se tienen varios vectores inscritos en el sistema de coordenadas y se requiere determinar su vector resultante. Este último desarrolla la suma vectorial algebraica de todos ellos, lo que se conoce en la física como "principio de superposición."

A continuación, la Fig. 8 muestra la representación geométrica del vector $\vec{A}$, lo cual nos indica que podemos representar cualquier vector en el espacio como la suma de tres vectores: el primero paralelo al eje x, el segundo paralelo al eje y, y el tercero paralelo al eje z [10]. También aparece en la parte de abajo de la gráfica su representación matemática, de forma algebraica vectorial.

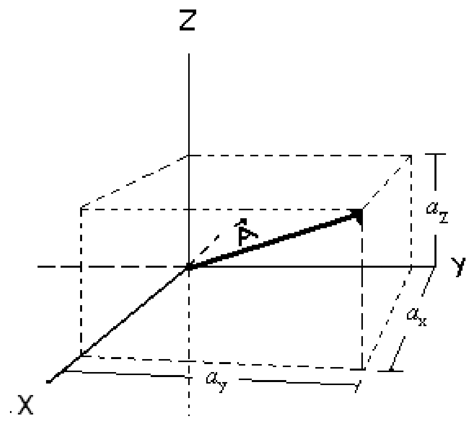


Figura 8. Representación geométrica del vector $\vec{A}$. Fuente: elaboración propia

$$\vec{A} = a_x \hat{I} + a_y \hat{J} + a_z \hat{K} \tag{8}$$

En (8) se representa matemáticamente el vector $\vec{A}$.

b) Determinación de la magnitud o módulo de un vector

Todo vector se compone de una magnitud o módulo, así como de un vector unitario. El módulo —como se mencionó— nos indica las veces que la unidad de medida, de acuerdo con la naturaleza del vector, está contenida en él. Por su parte, el vector unitario determina su dirección. Para obtener el módulo de cualquier vector en el espacio, según se expresa y deduce en [10] y [11], se hace uso de la expresión:

$$A=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{9}$$

Donde A, sin la flecha en la parte superior, representa la magnitud del vector $\vec{A}$, y a_x, a_y y a_z son las magnitudes (coeficientes escalares) de las componentes vectoriales del vector en referencia, el cual se denota en (8).

Ejemplo 1.

Determine la magnitud o modulo del vector $\vec{A}=\sqrt{2}u\hat{I}+3u\hat{J}+5u\hat{K}$. (La letra *u* representa la unidad de medida de la naturaleza del vector).

Solución

Al tener en cuenta (8) se deduce que $a_x=\sqrt{2}u$; $a_y=3u$; $a_z=5u$.

Al hacer uso de (9), esto nos permite determinar la magnitud del vector tenemos:

$$A=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(\sqrt{2}u)^2+(3u)^2+(5u)^2}=\sqrt{2u^2+9u^2+25u^2}=\sqrt{36u^2}$$

De la expresión anterior se concluye que la magnitud del vector $\vec{A}$ es A = 6u.

Ejemplo 2.

Hallar el módulo del vector $\vec{B}=-3u\hat{I}-4u\hat{J}=3u\ (-\hat{I})+4u\ (-\hat{J})$.

Solución

Si se tiene presente (8), y en analogía con esta se obtiene $b_x=-3u$; $b_y=-4u$; $b_z=0u$.. También se pueden tomar los valores positivos de las componentes del vector y el resultado será el mismo.

Al aplicar (9) con:

$$B=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$$

Tenemos:

$$B=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}=\sqrt{(-3u)^2+(-4u)^2+(0u)^2}=\sqrt{9u^2+16u^2+0u^2}=\sqrt{25u^2}$$

Es decir, la magnitud del vector $\vec{B}$ es B=5u.

Ejemplo 3.

Hallar el módulo del vector $\vec{C}=-8u\hat{I}=8u(-\hat{I})$.

Si se tiene presente (8), y en analogía con esta se obtiene cx = 8u; cy = 0; cz = 0, también se puede haber tomado el valor negativo y el resultado será el mismo.

Al aplicar (9) con $C=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}$, tenemos que:

$$C=\sqrt{(8u)^2+(0)^2+(0)^2}=\sqrt{(8u)}=\sqrt{8}$$
$$C=8u$$

Nota: cuando el vector estudiado se encuentra en una dimensión, su módulo será igual al valor absoluto de la magnitud de su componente dada.

c) Sistemas de coordenadas y vectores bases

Existen varios tipos de sistemas de coordenadas. Entre los más utilizados y conocidos se encuentran el sistema de coordenadas cartesianas, el de coordenadas polares y el de coordenadas esféricas, etc. En cada uno de estos sistemas de coordenadas espaciales se puede definir lo que regularmente se conoce como “campo vectorial” o “espacio vectorial”. En este todo punto perteneciente al espacio delimitado por el sistema de coordenadas representa o puede representarse por medio de un vector. Cada uno de estos vectores resulta de una combinación lineal de un conjunto de vectores especiales e independientes uno del otro, denominados “vectores bases”. En todo campo vectorial los vectores bases conforman la estructura matemática básica de todo vector y su número depende del espacio elegido. Cada uno de los sistemas mencionados al inicio solo están integrados por tres vectores bases, los cuales son diferentes. En sí, representar un vector dado, de forma algebraica vectorial y en cada uno de los sistemas coordenados, es totalmente diferente, ya que cada cual tiene su propia configuración de vectores bases. En particular, los vectores bases del sistema de coordenadas espacial cartesiano están conformados por los vectores unitarios $\hat{I}; \hat{J}$ y $\hat{K}$, en los que cada uno de ellos es un vector con magnitud 1, sin unidades, cuyo único fin es direccionar [8], [10].

d) Vectores unitarios y el sistema de coordenadas cartesianas

Como habrá notado el lector, en este texto se trabaja con el sistema de coordenadas cartesianas, el cual es un sistema ortogonal, es decir, los vectores que conforman su base vectorial son mutuamente perpendiculares entre sí, por tanto, entre ellos forman ángulos de 90º. Además, como se mencionó, son de módulo unitario por ser vectores unitarios. La representación analítica de cualquier vector se escribe con base en los vectores unitarios definidos en este sistema de coordenadas. Antes de profundizar más en el tema se define, a continuación, el concepto de *vector unitario*.

El vector unitario es aquel cuyo módulo o magnitud es igual a la unidad (1). Cualquier vector unitario, en general, se representa con el símbolo $\hat{r}$:, denominado particularmente "r-gorrito", o según [19], "sombrerillo" (esto último debido a la forma del símbolo en su parte superior). Cualquier vector unitario, en general, se expresa con este símbolo, y con el fin de diferenciar uno del otro se les agrega como subíndice la letra del vector al cual pertenece. Así, por ejemplo, el vector unitario del vector $\vec{A}$ estará dado por $\hat{r}_A$.

Ahora bien, con relación a los vectores unitarios del sistema espacial de coordenadas cartesianas y la representación algebraica vectorial de un vector, en [12] se observa que en el sistema de coordenadas espacial cartesiano encontramos una base de tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares, los cuales se pueden ampliar a seis debido a la dirección y el sentido en el que apuntan en los correspondientes ejes coordenados. Estos son:

- $\hat{I}$: vector unitario ubicado en el lado positivo del eje x de coordenadas cartesianas.
- $-\hat{I}$ vector unitario ubicado en el lado negativo del eje x de coordenadas cartesianas.
- $\hat{J}$: vector unitario ubicado en el lado positivo del eje y de coordenadas cartesianas.
- $-\hat{J}$: vector unitario ubicado en el lado negativo del eje y de coordenadas cartesianas.
- $\hat{k}$: vector unitario ubicado en el lado positivo del eje z de coordenadas cartesianas.
- $-\hat{k}$: vector unitario ubicado en el lado negativo del eje z de coordenadas cartesianas.

La Fig. 9 muestra la ubicación de los vectores unitarios positivos en el sistema espacial de coordenadas cartesianas correspondiente a la parte positiva de sus ejes coordenados [12]. Los otros vectores unitarios negativos también se ubican en el sistema, de manera respectiva y en sentido contrario a los positivos.

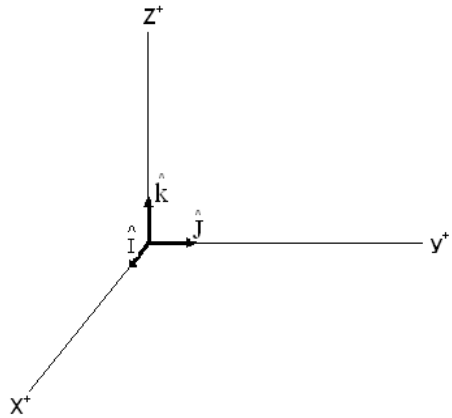


Figura 9. Ubicación de los vectores unitarios positivos (+) en el sistema cartesiano de coordenadas. Fuente: elaboración propia

Cualquier vector que se encuentre ubicado en el sistema de coordenadas espacial cartesiano se escribirá de forma algebraica vectorial como una combinación lineal de sus vectores unitarios. Por ejemplo, si se tiene el vector $\vec{A}$ que representa al punto (2, 6, 4) del espacio, tal como se muestra en la Fig. 10, este vector queda representado de forma algebraica vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{A} = (2u)\hat{I} + (6u)\hat{J} + (4u)\hat{K}$$

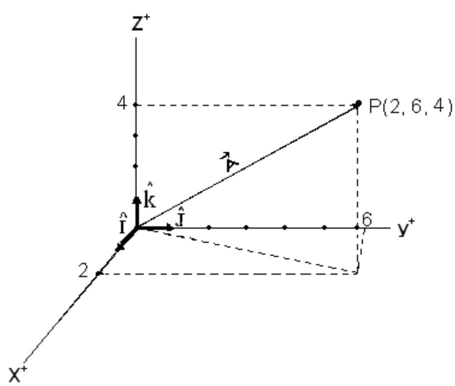


Figura 10. Representación gráfica del vector $\vec{A}$. Fuente: elaboración propia

Se encuentra que en ciertos libros de física mecánica, como, por ejemplo, en [13], se considera que esta notación de vectores no es necesaria cuando se estudian problemas en los que se trabaja en una sola dirección, y se simplifica al usar los signos de más (+) y de menos (-) para indicar las únicas dos direcciones posibles. Por ejemplo, (-) en la dirección *x* negativa, y (+) para el eje *x* positivo. Expresiones que no compartimos en su totalidad, porque se podrían prestar a confusión por parte del estudiante en términos de concepto.

En cuanto a la determinación del vector unitario de un vector, se debe considerar que todo vector se puede expresar en términos de su magnitud o valor, y de su vector unitario, cuyo único fin —según [14]— es indicar la dirección del vector. Para hallar el vector unitario de un vector se utilizan dos métodos muy conocidos. El primero de ellos consiste en que cuando se expresa un vector cualquiera con base en los vectores unitarios del sistema de coordenadas al cual pertenece, su vector unitario se determina al dividirse este entre su módulo o magnitud. Es decir, si se tiene el vector $\vec{A}$ y su magnitud A, su vector unitario está dado por la siguiente expresión [2], [4]:

$$\hat{r}_A = \frac{\vec{A}}{A} \tag{10}$$

Ejemplo 4.

Determine el vector unitario del vector $\vec{A} = (2u)\hat{I} + (6u)\hat{J} + (4u)\hat{K}$.

Solución

Se halla inicialmente la magnitud del vector por medio de (9), es decir:

$$A = \sqrt{(2u)^2 + (6u)^2 + (4u)^2} = \sqrt{56u^2}$$

Por tanto, se concluye que la magnitud del vector $\vec{A}$ es de:

$$A = \sqrt{56}\,u$$

Ahora bien, al hacer uso de (10), se divide el vector $\vec{A}$ entre su módulo para obtener su vector unitario, así:

$$\hat{r}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(2u)\hat{I} + (6u)\hat{J} + (4u)\hat{K}}{\sqrt{56}\,u}$$

Al simplificar términos semejantes y distribuir el denominador en la fracción anterior se obtiene:

$$\hat{r}_A = \frac{2}{\sqrt{56}}\hat{I} + \frac{6}{\sqrt{56}}\hat{J} + \frac{4}{\sqrt{56}}\hat{K}$$

A continuación, se demuestra que el vector anterior es en verdad el vector unitario de $\vec{A}$. Para esto se debe mostrar que su módulo es igual a 1. En este propósito se procede de la siguiente manera:

$$\left|\hat{r}_A\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{56}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{56}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{56}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{56} + \frac{36}{56} + \frac{16}{56}}$$

Finalmente, se obtiene que:

$$\left|\hat{r}_A\right| = \sqrt{\frac{56}{56}} = \sqrt{1} = 1$$

Del resultado anterior se concluye que el vector $\hat{r}_A$ es un vector unitario en la dirección de $\vec{A}$.

Ejemplo 5.

Determine el vector unitario del vector $\vec{B} = (3u)\hat{I} + (-6u)\hat{J} + (\sqrt{4}u)\hat{K}$.

Solución

Inicialmente, se procede a determinar el módulo de $\vec{B}$, así:

$$B = \sqrt{(3u)^2 + (-6u)^2 + (\sqrt{4}u)^2} = \sqrt{49u^2}$$

Al sacar la raíz cuadrada se llega a que la magnitud del vector $\vec{B}$ es B=7u.

Al aplicar (10), es decir, $\hat{r}_B = \frac{\vec{B}}{B}$, para determinar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{B}$, tenemos:

$$\hat{r}_B = \frac{(3u)\hat{I} + (-6u)\hat{J} + (\sqrt{4}u)\hat{K}}{7u} = \frac{3}{7}\hat{I} - \frac{6}{7}\hat{J} + \frac{2}{7}\hat{K}$$

Por tanto, el vector unitario en la dirección del vector $\vec{B}$ está dado por:

$$\hat{r}_B = \frac{3}{7}\hat{I} - \frac{6}{7}\hat{J} + \frac{2}{7}\hat{K}$$

Ejemplo 6.

Hallar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{C}= (-4u)\hat{I} = (3u)\hat{J}$.

Solución

Se procede, inicialmente, a determinar el módulo del vector $\vec{C}$, así:

$$C=\sqrt{(-4u)^2+(3u)^2}=\sqrt{16u^2+9u^2}=5u$$

Al hacer uso de la expresión $\hat{r}_c=\frac{\vec{C}}{C}$ tenemos que:

$$\hat{r}_C=\frac{(-4u)\hat{I}+(3u)\hat{J}}{5u}$$

Si se simplifican los términos semejantes y se distribuye el denominador en la fracción anterior se obtiene:

$$\hat{r}_C=-\frac{4}{5}\hat{I}+\frac{3}{5}\hat{J}$$

Ejemplo 7.

Hallar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{D}=(-8u)\hat{I}$.

Solución

Dado que el vector $\vec{D}$ solo tiene una componente y, además, se puede reescribir de la forma: $\vec{D}=8u(-\hat{I})$, se concluye por inspección inmediata que su vector unitario está dada por $\hat{r}_D=-\hat{I}$.

El segundo método consiste en utilizar el concepto de cósenos directores. Estos últimos permiten también determinar el vector unitario en la dirección del vector, para lo cual se utiliza la expresión:

$$\hat{r}=\mathrm{Cos}(\alpha)\hat{I}+\mathrm{Cos}(\beta)\hat{J}+\mathrm{Cos}(\gamma)\hat{K} \tag{11}$$

Donde, según [15] y [16], α, β, y γ son los ángulos que forma el vector con los correspondientes ejes de referencia (x, y, z), los cuales se denominan "ángulos de dirección del vector al cual se le quiere determinar su vector unitario". Cada uno de estos ángulos se mide desde el lado positivo del eje correspondiente hasta la ubicación del vector, tal como se muestra en la Fig. 11.

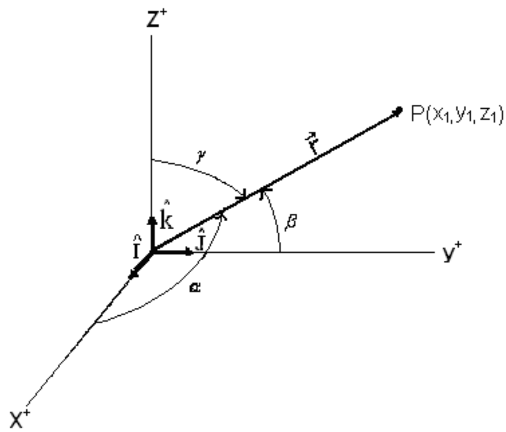


Figura 11. Ubicación de los ángulos directores del vector $\vec{r}$. Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [5], los cósenos de dirección angular deben cumplir con la siguiente ley:

$$[\mathrm{Cos}(\alpha)]^2+[\mathrm{Cos}(\beta)]^2+[\mathrm{Cos}(\gamma)]^2 = 1 \tag{12}$$

Si esto no se cumple, se puede decir que los tres ángulos dados no son los ángulos de dirección del vector analizado, y, por tanto, con estos no se puede determinar su vector unitario. Ahora, dado que todo vector se puede determinar a través de su magnitud y dirección [2], y que esta última queda definida a través de su vector unitario, lo anterior permite concluir que cualquier vector se puede expresar de la siguiente forma:

$$\vec{R} = R\hat{r}_R \tag{13}$$

Donde:

- $\vec{R}$: representa cualquier vector en el sistema espacial cartesiano.
- R: representa la magnitud, el módulo o valor del vector.
- $\hat{r}_R$: representa el vector unitario en la dirección del vector $\vec{R}$.

Al tener presente la expresión que representa el vector unitario en términos de los cósenos directores, es posible decir que todo vector $\vec{R}$ del espacio cartesiano se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{R} = R[\cos(\alpha)\hat{\imath} + \cos(\beta)\hat{\jmath} + \cos(\gamma)\hat{k}] \qquad (14)$$

Donde α, β, y γ son los tres ángulos de dirección del vector $\vec{R}$.

Así, (14) permite determinar la expresión algebraica vectorial de cualquier vector cuando se conoce su magnitud y sus ángulos de dirección. Esta última también se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\vec{R} = R\cos(\alpha)\hat{\imath} + R\cos(\beta)\hat{\jmath} + R\cos(\gamma)\hat{k}$$

Según [4], los términos vectoriales $R\cos(\alpha)\hat{\imath}$, $R\cos(\beta)\hat{\jmath}$ y $R\cos(\gamma)\hat{k}$ en la expresión anterior representan las proyecciones o componentes vectoriales del vector $\vec{R}$ sobre cada uno de los ejes de coordenadas cartesianas (*xyz*), mientras que los coeficientes escalares de estas mismas están dadas por:

- $R_x = R\mathrm{Cos}(\alpha)$ (15)
- $R_y = R\mathrm{Cos}(\beta)$ (16)
- $R_z = R\mathrm{Cos}(\gamma)$ (17)

Ejemplo 8.

a) Determina el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$, cuyos coeficientes escalares tienen los valores $a_x = -2u$, $a_y = 3u$, y $a_z = 5u$; b) encuentre el valor de los ángulos de dirección α, β, y γ del vector; y c) exprese el vector en términos de los vectores unitarios cartesianos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

Solución

a) Inicialmente hallamos la magnitud del vector $\vec{A}$, el cual está dado por:

$$A = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} = \sqrt{(-2u)^2 + (3u)^2 + (5u)^2}$$

Es decir:

$$A = \sqrt{4u^2 + 9u^2 + 25u^2} = \sqrt{38u^2}$$

Al sacar raíz cuadrada finalmente se obtiene que:

$$A = \sqrt{38}u$$

Al utilizar ecuaciones (15), (16) y (17) tenemos:

$$a_x = A\ \mathrm{Cos}(\alpha);\ a_y = A\ \mathrm{Cos}(\beta);\ a_z = A\ \mathrm{Cos}(\gamma)$$

Despejando en cada una de las ecuaciones anteriores los respectivos cósenos directores se obtiene:

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \frac{a_x}{A};\ \mathrm{Cos}(\beta) = \frac{a_y}{A};\ \mathrm{Cos}(\gamma) = \frac{a_z}{A}$$

Al reemplazar los valores correspondientes en estas ecuaciones tenemos:

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \frac{-2\mathrm{u}}{\sqrt{38}\mathrm{u}};\ \mathrm{Cos}(\beta) = \frac{3\mathrm{u}}{\sqrt{38}\mathrm{u}};\ \mathrm{Cos}(\gamma) = \frac{5\mathrm{u}}{\sqrt{38}\mathrm{u}}$$

Si se simplifican las unidades correspondientes:

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \frac{-2}{\sqrt{38}};\ \mathrm{Cos}(\beta) = \frac{3}{\sqrt{38}};\ \mathrm{Cos}(\gamma) = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

Ahora, dado que de acuerdo con (11) todo vector unitario está definido a través de la expresión:

$$\hat{r}_A = \mathrm{Cos}(\alpha)\hat{I} + \mathrm{Cos}(\beta)\hat{J} + \mathrm{Cos}(\gamma)\hat{K}$$

Entonces, al reemplazar en (11) los valores determinados de los cósenos directores en la parte de arriba se encuentra que el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$, está dado por:

$$\hat{r}_A = \frac{-2}{\sqrt{38}}\hat{I} + \frac{3}{\sqrt{38}}\hat{J} + \frac{5}{\sqrt{38}}\hat{K}$$

b) Para determinar los ángulos de dirección hacemos uso de la función arco coseno, así:

$$\alpha = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{38}}\right);\ \beta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right);\ \gamma = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)$$

Al realizar las operaciones correspondientes en la parte de arriba se obtienen los siguientes valores para los ángulos:

$$\alpha= 108{,}9318232^0;\ \beta= 60{,}87843193^0;\ \gamma= 35{,}79575992^0$$

c) El vector $\vec{A}$, en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ queda expresado de la siguiente manera:

$$\vec{A}=-2u\hat{I} + 3u\hat{J} + 5u\hat{K}$$

Ejemplo 9.

a) Determinar los ángulos de dirección α, β, y γ del vector $\vec{B}$ cuyos coeficientes escalares tienen los valores b_x= -4u, b_y= 6u y b_z = -3u; b). Halle el vector unitario en la dirección de $\vec{B}$.

Solución

a) Se determina, inicialmente, la magnitud del vector $\vec{B}$ el cual está definido así:

$$\vec{B}= b_x\hat{I} + b_y\hat{J} + b_z\hat{K} = -4u\,\hat{I} + 6u\,\hat{J} - 3u\hat{K}$$

Entonces,

$$B = \sqrt{(-4u)^2 + (6u)^2 + (-3u)^2} = \sqrt{16u^2 + 36u^2 + 9u^2}$$

Al sumar términos semejantes y sacar raíz cuadrada tenemos:

$$B = \sqrt{61}u$$

Ahora, como se sabe, los cósenos directores están definidos así:

$$\mathrm{Cos}(\alpha)=\frac{b_x}{B};\ \mathrm{Cos}(\beta)=\frac{b_y}{B};\ \mathrm{Cos}(\gamma)=\frac{b_z}{B}$$

De las expresiones anteriores se despejan los ángulos directores, y se obtiene:

$$\alpha = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{b_x}{B}\right);\ \beta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{b_y}{B}\right);\ \gamma=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{b_z}{B}\right)$$

Al reemplazar los valores conocidos en las ecuaciones de arriba tenemos:

$$\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-4u}{\sqrt{61u}}\right);\ \beta=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{6u}{\sqrt{61u}}\right);\ \gamma=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{61u}}\right)$$

Al simplificar las unidades correspondientes y hallar los respectivos cosenos inversos tenemos:

$$\alpha= 120{,}8069811^0;\ \beta= 39{,}80557109^0;\ \gamma= 112{,}5885388^0$$

b) Para determinar el vector unitario $\hat{r}_B$ del vector $\vec{B}$ se hace uso de (11):

$$\hat{r}_B= \mathrm{Cos}(\alpha)\hat{I}+\mathrm{Cos}(\beta)\hat{J}+\mathrm{Cos}(\gamma)\hat{K}$$

Por tanto, el vector unitario pedido está dado por:

$$\hat{r}_B= Cos\ (120{,}8069811^0)\hat{I} + Cos\ (39{,}80557109^0)\hat{J} + Cos\ (112{,}5885388^0)\hat{K}$$

Hallando el coseno a cada uno de los valores de ángulos indicados en la parte de arriba se obtiene, finalmente, el vector unitario en la dirección de $\vec{B}$:

$$\hat{r}_B= -0{,}512\hat{I} + 0{,}768\hat{J} - 0{,}384\ \hat{K}$$

El vector unitario $\hat{r}_B$ también se puede determinar por medio de la expresión:

$$\hat{r}_B=\frac{\vec{B}}{B}$$

Es decir:

$$\hat{r}_B= \frac{-4u\hat{I} + 6u\hat{J} - 3u\hat{K}}{\sqrt{61u}}$$

En definitiva, el vector unitario de $\vec{B}$, al simplificar las unidades correspondientes y distribuir el término que se encuentra en el denominador de la fracción indicada en la parte de arriba, queda expresado así:

$$\hat{r}_B= -\frac{4}{\sqrt{61}}\hat{I} + \frac{6}{\sqrt{61}}\hat{J} - \frac{3}{\sqrt{61}}\hat{K}$$

A continuación, se relaciona la determinación del vector unitario en la dirección del vector en un plano cartesiano por el método de los cóseno directores.

De acuerdo con lo que se puede deducir de los planteamientos de [5] y [17], para hallar el vector unitario en la dirección de un vector en particular por el método de los cósenos directores en el plano cartesiano, primero se debe determinar en cuáles de los planos se encuentra este, ya que esto permitirá conocer cuál de los tres ángulos directores (α, β, y γ) es igual a 90^0 ó 270^0 , lo que implica que su correspondiente vector unitario asociado a él desaparezca, ya que el coseno para estos valores de ángulos es igual a cero. Ahora se detallan las condiciones bajo las cuales un vector particular ($\vec{r}$) pertenece a un plano determinado, de acuerdo con el valor de uno de los ángulo y los cósenos de dirección.

Para el vector unitario en el plano xy, si $\gamma = 90^0$ ó $\gamma = 270^0 \rightarrow \mathrm{Cos}(\gamma) = 0$, de (11) se deduce que: $\hat{r} = \mathrm{Cos}(\alpha)\hat{I} + \mathrm{Cos}(\beta)\hat{J}$.

Para el vector unitario en el plano xz, si $\beta = 90^0$ ó $\beta = 270^0 \rightarrow \mathrm{Cos}(\beta) = 0$, de (11) se determina que $\hat{r} = \mathrm{Cos}(\alpha)\hat{I} + \mathrm{Cos}(\gamma)\hat{K}$.

Para el vector unitario en el plano *yz*, si $\alpha = 90^0$ ó $\alpha = 270^0 \rightarrow \mathrm{Cos}(\alpha) = 0$, de (11) se concluye que $\hat{r} = \mathrm{Cos}(\beta)\hat{J} + \mathrm{Cos}(\gamma)\hat{K}$.

Así, entonces, dado cualquier vector y al tener en cuenta las expresiones anteriores que definen los vectores unitarios para los distintos planos, es posible con ellos determinar en cuáles de estos se encuentra. Por ejemplo:

$$\vec{A} = A[\cos(\alpha)\hat{I} + \cos(\beta)\hat{J}] \text{ Vector en el plano xy}$$
$$\vec{B} = B[\cos(\alpha)\hat{I} + \cos(\gamma)\hat{K}] \text{ Vector en el plano xz}$$
$$\vec{C} = C[\cos(\beta)\hat{J} + \cos(\gamma)\hat{K}] \text{ Vector en el plano yz}$$

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos que nos permitirán aclarar mejor el tema.

Ejemplo 10.

Dado el vector $\vec{A}$ en la Fig. 12, expréselo de forma algebraica vectorial.

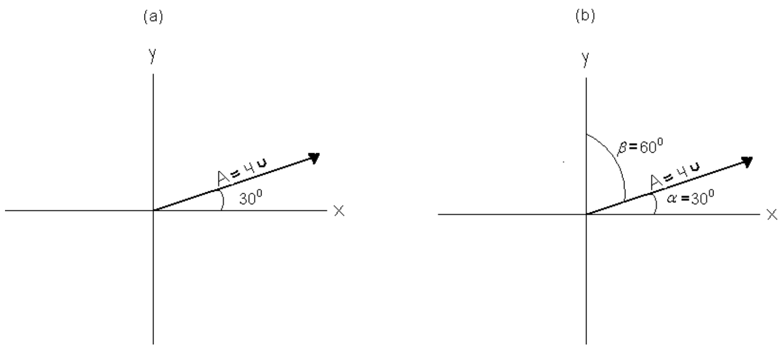


Figura 12. Vector $\vec{A}$ ubicado en el primer cuadrante del plano xy. Fuente: elaboración propia

Solución

Lo primero que se tiene que hallar es el vector unitario en la dirección del vector. Para esto se hará un análisis de la Fig 12, tal como se muestra a continuación.

La Fig. 12 muestra que el vector $\vec{A}$ se encuentra en el plano (*xy*). Por tanto, podemos deducir de ella el valor de los ángulos de dirección ***α, β,*** y *γ* de acuerdo con las siguientes consideraciones:

Dado que el vector se encuentra en el plano (*xy*), entonces su vector unitario según (11) queda expresado así:

$$\hat{r}_A = \mathrm{Cos}(\alpha)\hat{\mathrm{I}} + \mathrm{Cos}(\beta)\hat{\mathrm{J}}$$

De la expresión anterior se deduce que, $\gamma = 90^0$ ó $\gamma = 270^0$, ya que el vector unitario $\hat{K}$ no aparece en la expresión general que lo define, lo que quiere decir que $\mathrm{Cos}(\gamma) = 0$. Además de la imagen (b), se puede deducir que $\alpha = 30^o$ y $\beta = 60^o$, debido a que α es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (*x*+), el cual para este caso tiene un valor de 30^0 . Mientras que β es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (*y*+), el cual, según la gráfica de la Fig. 12 tiene el valor de 60^0.

Por lo anterior, el vector unitario de $\vec{A}$ esta dado por:

$$\hat{r}_A = \mathrm{Cos}(30^0)\hat{I} + \mathrm{Cos}(60^0)\hat{J} = 0{,}866\hat{I} + 0{,}5\hat{J}$$

Es decir:

$$\hat{r}_A = 0{,}866\hat{I} + 0{,}5\hat{J}$$

Ahora, al utilizar (13) con $\vec{A} = A\hat{r}_A$ tenemos:

$$\vec{A} = 4u\left(0{,}866\hat{I} + 0{,}5\hat{J}\right)$$

Si se destruye el paréntesis en la expresión anterior se encuentra que la expresión matemática vectorial que representa al vector $\vec{A}$ esta dada por:

$$\vec{A} = 3{,}464\text{u}\ \hat{\text{I}} + 2\text{u}\ \hat{J}$$

Ejemplo 11.

Teniendo en cuenta la Fig. 13 deduzca la expresión matemática vectorial que define al vector $\vec{B}$.

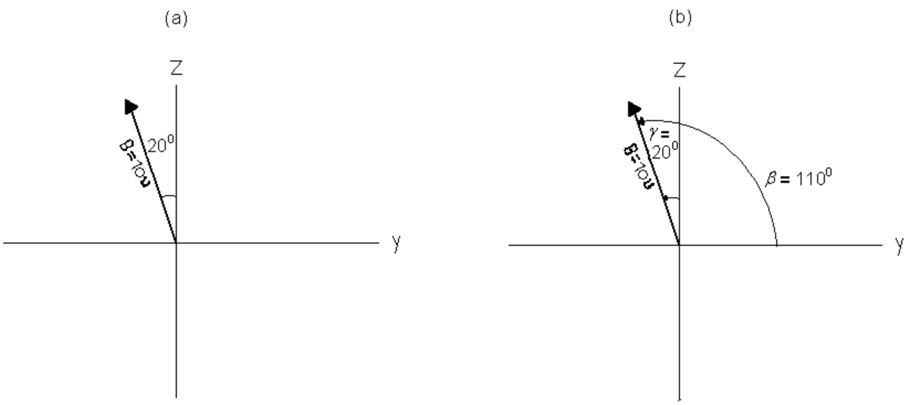


Figura 13. Vector $\vec{B}$ ubicado en el segundo cuadrante del plano yz. Fuente: elaboración propia

Solución

Lo primero que se tiene que hallar es el vector unitario en la dirección del vector. Para esto se hará un análisis de la imagen (a), como se detalla a continuación. La imagen nos muestra que el vector $\vec{B}$ se encuentra en el plano (*yz*). Por tanto, podemos deducir de ella el valor de los ángulos de dirección *α, β,* y *γ*. Ahora, si se tiene en cuenta (11), la cual define el vector unitario, tenemos:

$$\hat{r}_B = \text{Cos}(\beta)\hat{\text{J}} + \text{Cos}(\gamma)\hat{\text{K}}$$

De la expresión anterior se puede decir que $\alpha = 90^0$ 0 $\alpha = 270^0$, ya que el vector unitario $\hat{I}$ no aparece en ella, lo cual implica que el coseno director $\text{Cos}(\alpha) = 0$.

De la imagen (b) se puede deducir que β =110º 0 γ = 20º, debido a que β es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (y+), el cual tiene un valor de 110^0 . Mientras que γ es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (z+), el cual según la gráfica de la Fig. 13 tiene el valor de 20^0.

Por lo anterior, se deduce que el vector unitario de $\vec{B}$ esta dado por:

$$\hat{r}_B = \mathrm{Cos}(110^o)\hat{J} + \mathrm{Cos}(20^o)\hat{K} = -0{,}342\hat{J} + 0{,}939\hat{K}$$

Ahora, al hacer uso de (13) con $\vec{B} = B\hat{r}_B$ tenemos:

$$\vec{B} = 10\mathrm{u}\left(-0{,}342\hat{J} + 0{,}939\hat{K}\right)$$

Al destruir los paréntesis, se deduce que la expresión matemática que representa al vector $\vec{B}$ esta dada por:

$$\vec{B} = -3{,}42u\hat{J} + 9{,}39u\hat{K}$$

Ejemplo 12.

De la Fig. 14 deduzca la expresión matemática que define al vector $\vec{C}$.

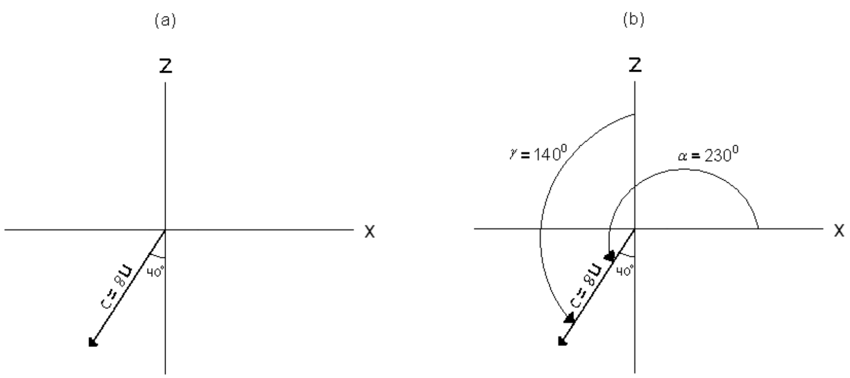


Figura 14. Vector ubicado en el tercer cuadrante del plano xz. Fuente: elaboración propia

Solución

Inicialmente, se halla el vector unitario en la dirección del vector. Para esto se realiza un análisis de la imagen (a) como se muestra a continuación. La imagen (a) nos muestra que el vector $\vec{C}$ se encuentra en el plano (xz). Por tanto, es posible deducir de ella el valor de los ángulos de dirección α, β, y γ, si se tienen en cuenta las siguientes consideraciones.

Dado que el vector se encuentra en el plano (xz), entonces su vector unitario está dado por:

$$\hat{r}_C = \text{Cos}(\alpha)\hat{I} + \text{Cos}(\gamma)\hat{K}$$

De la expresión anterior se puede decir que $\beta = 90^o$ 0 $\beta = 270^o$, ya que el vector unitario $\hat{J}$ no aparece en la expresión general que define el vector unitario del vector $\vec{C}$, lo cual implica que el coseno director $\text{Cos}(\beta) = 0$.

Ahora, de la figura (b) se puede deducir que $\alpha = 230^o$ 0 $\gamma = 140^o$, debido a que α es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (x+), el cual tiene un valor de 230^0 . Mientras que γ es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (z+), el cual según la gráfica de la Fig. 14 tiene el valor de 140^0. Por tanto, el vector unitario de $\vec{C}$ esta dado por:

$$\hat{r}_C = \text{Cos}(230^0)\hat{I} + \text{Cos}(140^0)\hat{K} = -0{,}642\ \hat{I} - 0{,}766\hat{K}$$

Es decir:

$$\hat{r}_C = -0{,}642\ \hat{I} - 0{,}766\hat{K}$$

Por tanto, al hacer uso de (13) con $\vec{C} = C\hat{r}_C$, tenemos que:

$$\vec{C} = 8u\left(-0{,}642\ \hat{I} - 0{,}766\hat{K}\right)$$

Al destruir el paréntesis en la ecuación de arriba se concluye que la expresión matemática que representa al vector $\vec{C}$ es:

$$\vec{C} = -5{,}136u\ \hat{I} - 6{,}128u\ \hat{K}$$

Ejemplo 13.

De la Fig. 15 deduzca la expresión matemática que define al vector $\vec{D}$.

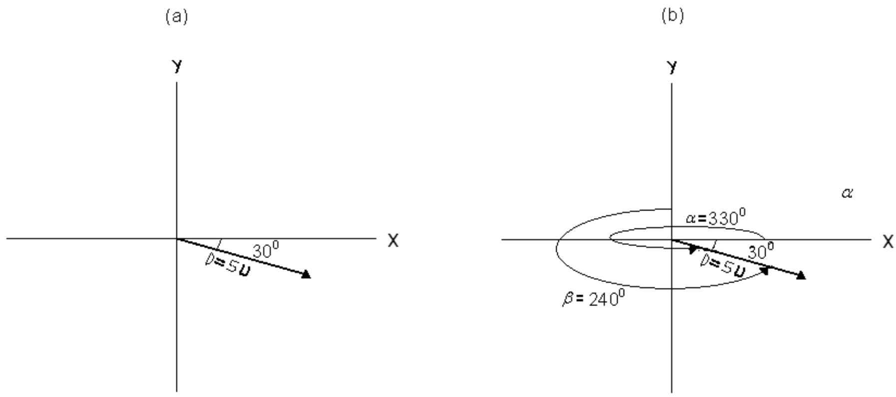


Figura 15. Vector ubicado en el cuarto cuadrante del plano cartesiano.
Fuente: elaboración propia

Solución

Inicialmente, se tiene que hallar el vector unitario en la dirección del vector. Para esto se realiza un análisis de la figura (a), tal como se muestra a continuación. La figura en consideración nos muestra que el vector $\vec{D}$ se encuentra en el plano (*xy*). Por tanto, podemos deducir de ella el valor de los ángulos de dirección α, β, y γ al tener en cuenta lo siguiente.

Dado que el vector se encuentra en el plano (*xy*), entonces su vector unitario está dado por:

$$\hat{r}_D = \text{Cos}(\alpha)\hat{I} + \text{Cos}(\beta)\hat{J}$$

De la expresión del vector unitario anterior se puede decir que $\gamma = 90^o$ 0 $\gamma = 270^o$, ya que el vector unitario $\hat{K}$ no aparece en la expresión general que lo define, lo cual implica que el coseno director $\text{Cos}(\gamma) = 0$.

De la figura (b) se puede deducir que $\alpha = 330^o$ 0 $\beta = 240^o$, debido a que α es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (X+), el cual tiene un valor de 330^0 . Mientras que β es el ángulo de dirección del vector que se mide con respecto al eje (y+), el cual según la gráfica de la Fig. 15 tiene el valor de 240^0. Por tanto, se deduce que el vector unitario de $\vec{D}$ esta dado por:

$$\hat{r}_D = \text{Cos}(330^0)\hat{I} + \text{Cos}(240^0)\hat{J} = 0{,}866\ \hat{I} - 0{,}5\hat{J}$$

Ahora, al hacer uso de (13), con $\vec{D} = D\hat{r}_D$ tenemos que:

$$\vec{D} = 5u\left(0{,}866\,\hat{\imath} - 0{,}5\,\hat{\jmath}\right)$$

Finalmente, la expresión matemática vectorial que representa al vector $\vec{D}$ esta dado por:

$$\vec{D} = 4{,}330u\,\hat{\imath} - 2{,}5u\hat{\jmath}$$

e) Vectores en tres, dos y una dimensión

Es común que un vector puede estar compuesto por tres, dos y una componente. El número de sus componentes determina la dimensión en la que este se encuentra. Es así como hallamos vectores definidos en el espacio, en el plano o en una línea recta como se detalla a continuación.

Los vectores en tres dimensiones, según [16], se encuentran conformados por tres componentes y se dice que pertenecen al sistema de coordenada cartesiano tridimensional o espacial. Estos, en general, presentan la siguiente configuración vectorial:

$$\vec{V} = V_x\hat{I} + V_y\hat{J} + V_z\hat{K} \tag{18}$$

Así, sucesivamente, donde Vx, Vy y Vz son los respectivos coeficientes escalares de los vectores unitarios que conforman al vector, los cuales permiten determinar la magnitud del vector original como se vio en los casos anteriores.

Son ejemplos de vectores en tres dimensiones las siguientes expresiones:

$$\vec{A} = 2u\hat{I} + 6u\hat{J} + 4u\hat{k};\ \vec{B} = 3u(-\hat{I}) + 5u(-\hat{J}) + 9u\hat{k};\ \vec{C} = -6u\hat{I} + 2u\hat{J} - 7u\hat{k}$$

Cabe aclarar que el vector $\vec{C}$ se puede escribir también de la siguiente manera al tener presente la ley de los signos:

$$\vec{C} = 6u(-\hat{I}) + 2u\hat{J} + 7u(-\hat{k})$$

La anterior explicación se hace con el fin de no crear confusión, sobre todo cuando se traten problemas en los que se realicen operaciones con vectores.

En la Fig. 16 se muestran algunos vectores en el sistema de coordenadas espacial cartesiano.

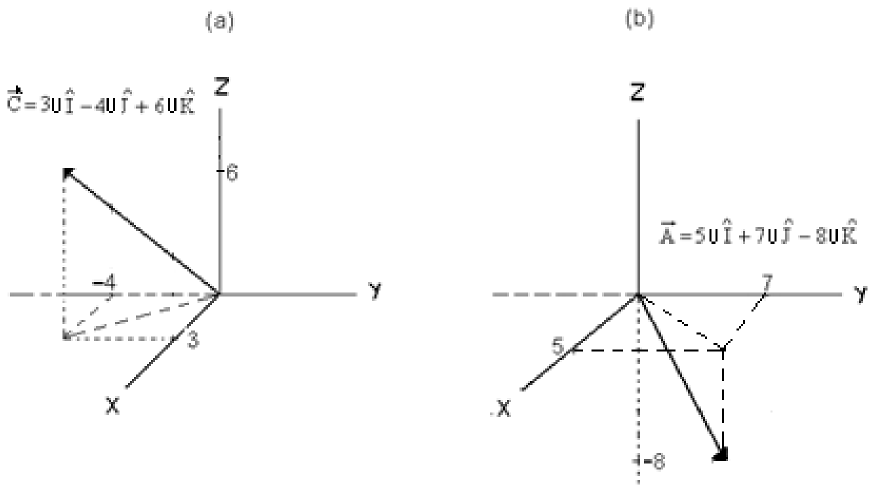


Figura 16. Vectores en tres dimensiones, ubicados en el sistema espacial cartesiano (xyz).
Fuente: elaboración propia

Ahora bien, los vectores en dos dimensiones son los que están conformados únicamente por dos componentes vectoriales mutuamente perpendiculares entre sí, y paralelos a dos ejes de un sistema cartesiano particular de coordenadas [18]. Por tanto, de [19] se concluye que estos se encuentran constituidos solo por dos de los tres vectores unitarios del sistema espacial de coordenadas cartesianas, cada uno con su respectivo valor o coeficiente escalar. Cuando un vector se encuentra integrado solo por dos componentes vectoriales se dice que este está ubicado en un plano. Lo anterior implica que uno de los cosenos directores que hacen parte de la fórmula general que permite determinar el vector unitario espacial en la dirección del vector es cero. Por lo general, estos, según (18), presentan la siguiente estructura vectorial:

$$\vec{V} = V_x\hat{I} + V_y\hat{J};\ \vec{V} = V_y\hat{J} + V_z\hat{k};\ \vec{V} = V_x\hat{I} + V_z\hat{k}$$

Son ejemplos de vectores en dos dimensiones:

$$\vec{P} = 4u(-\hat{I}) + 7u\hat{J};\ \vec{M} = 5u\hat{I} - 8u\hat{k};\ \vec{N} = 3u(-\hat{J}) + 2u(-\hat{k});\ \vec{A} = -9u\hat{I} + 6u\hat{K}$$

Recuerde que el vector $\vec{A}$ se puede escribir también de la siguiente forma:

$$\vec{A} = -9u\hat{I} - 6u\hat{k} = 9u(-\hat{I}) + 6u(-\hat{k})$$

En la Fig. 17 se muestran algunos vectores ubicados en el plano cartesiano (xy), lo cual implica para este caso en particular que para todos los vectores en este plano $\cos\gamma = 0$. Es decir, ninguno de ellos tiene componente en la dirección del eje z.

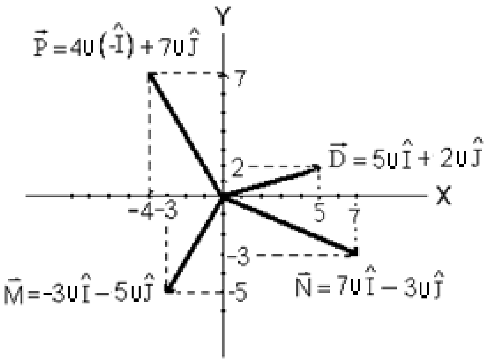


Figura 17. Vectores en dos dimensiones ubicados en el plano cartesiano xy, donde $\cos(\gamma) = 0$.
Fuente: elaboración propia

De lo expresado en [18], [19] y [20], se deduce que lo s vectores en una dimensión solo tienen una componente vectorial, es decir, únicamente presentan en su formulación matemática vectorial uno de los vectores unitarios perteneciente al sistema coordenado espacial cartesiano, con su correspondiente valor o coeficiente escalar. En este tipo particular de vectores se puede concluir que dos de los cósenos directores de la fórmula general que permite determinar el vector unitario espacial en la dirección del vector se hacen iguales a cero. Este tipo de vectores muestran, por lo general, la siguiente configuración vectorial, según (18):

$$\vec{D}= D_x\,\hat{I};\ \ \vec{E}= E_y\,\hat{J};\ \ \vec{R}= R_z\hat{k};\ \ \vec{F}= F_x(-\hat{I})\ ;\ \ \vec{H}= -H_x\,\hat{J};\ \ \vec{L}= L_x(-\hat{k}), \text{ etc.}$$

El vector unitario que integra y le define la dirección al vector unidimensional determina el eje sobre el que se encuentra o proyecta éste. En la Fig. 18 se muestran algunos vectores unidimensionales representados en sus correspondientes rectas numéricas, en las cuales se encuentran definidos.

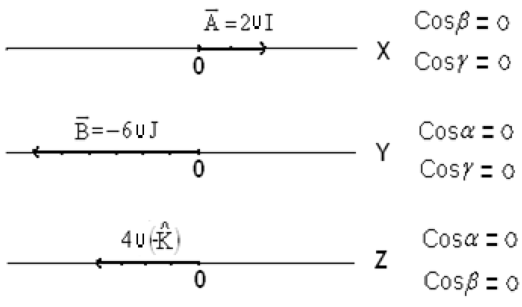


Figura 18. Ejemplo de vectores en una dimensión. Fuente: elaboración propia

f) Operaciones entre vectores

En física, mucho de los observables físicos requieren de las operaciones entre vectores para su determinación. Lo anterior a causa de las ecuaciones matemáticas que los definen, ya que algunas de estas muestran ciertos observables que resultan de la operación vectorial entre otras magnitudes físicas que se enmarcan entre los denominados "vectores". Esto explica la necesidad y la importancia de conocer y saber realizar las diferentes operaciones con vectores, todo con el fin de aplicarlos en la solución de problemas que se presentan en esta área de conocimiento.

Entre las operaciones conocidas y aplicadas en los vectores tenemos la suma, la resta, el producto punto o producto escalar, y el producto cruz o vectorial [2] y [5].

- ### Suma de vectores

Ahora bien, con respecto a la suma de vectores, según [2] y [5], para hallar la suma entre dos, tres o más vectores que se encuentran integrados por medio de una combinación lineal de término, estos últimos conformados por un coeficiente numérico y un vector base unitario, se tendrán presentes las reglas del álgebra para la suma. Es decir, inicialmente se expresa como suma la agrupación que se realiza en un paréntesis de los correspondientes términos semejantes que presentan los vectores implicados en esta operación. Estos términos semejantes los representan los vectores unitarios, con su respectivo coeficiente, así: $\hat{I}$ con $\hat{I}$; $\hat{J}$ con $\hat{J}$ y $\hat{k}$ con $\hat{k}$. Luego, en cada paréntesis se saca como factor común el vector unitario que se encuentra en su interior. Por último, se realiza la suma indicada de los valores dentro de ellos, lo cual arrojará un resultado para cada componente. Finalmente, cada uno de los valores obtenidos con su respectivo vector unitario harán parte integral del llamado "vector resultante".

De acuerdo con [2], [5], [10] y [20], la ecuación matemática que permite determinar el vector resultante de la suma de vectores esta dada por:

$$\vec{V}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{k}}_i = \vec{\mathrm{k}}_1 + \vec{\mathrm{k}}_2 + \vec{\mathrm{k}}_3 + \cdots \vec{\mathrm{k}}_n \tag{19}$$

Donde:

- $\vec{V}_R$ es el vector resultante de la suma de vectores.
- $\vec{k}_i$: representa cada uno de los vectores que se están sumando.

Ejemplo 14.

Determine el vector resultante de la suma entre los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 4u\hat{I} - 5u\hat{J} - 8u\hat{\mathrm{k}};\ \vec{B} = -2u\hat{I} + 5u\hat{J} - 7u\mathrm{k};\ \vec{C} = 9u\hat{I} - 1u\hat{J} + 8u\hat{\mathrm{k}}$$

Solución

Expresando la suma de vectores, como se indica en (19), se obtiene que:

$$\vec{V}_R = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (4u\hat{I} - 5u\hat{J} - 8u\hat{\mathrm{k}}) + (-2u\hat{I} + 5u\hat{J} - 7u\hat{\mathrm{k}}) + (9u\hat{I} - 1u\hat{J} + 8u\hat{\mathrm{k}})$$

Al agrupar términos semejantes:

$$\vec{V}_R = (4u\hat{I} - 2u\hat{I} + 9u\hat{I}) + (-5u\hat{J} + 5u\hat{J} - 1u\hat{J}) + (-8u\hat{\mathrm{k}} - 7u\hat{\mathrm{k}} + 8u\hat{\mathrm{k}})$$

Al sacar factor común en cada uno de los paréntesis se obtiene:

$$\vec{V}_R = (4 - 2 + 9)u\hat{I} + (-5 + 5 - 1)u\hat{J} + (-8 - 7 + 8)u\hat{\mathrm{k}}$$

Al realizar las operaciones correspondientes en cada uno de los paréntesis se llega a:

$$\vec{V}_R = 11u\hat{I} - 1u\hat{J} - 7u\hat{\mathrm{k}}$$

Al vector de arriba, se le denomina “vector resultante de la suma de vectores”.

Ejemplo 15.

Determine el vector resultante de la suma entre los siguientes vectores:

$$\vec{A}= 7u\hat{I} + 6u\hat{J};\ \ \vec{B}= -4u\hat{I} -8u\hat{J};\ \ \vec{C}= 3u\hat{I} -6u\hat{J};\ \ \vec{D}= -4u\hat{I} -9u\hat{J}$$

Solución

Si se tiene presente (19), se obtiene:

$$\vec{V}_R= \vec{A} + \vec{B} +\vec{C} + \vec{D}= (7u\hat{I} +6u\hat{J}) + (-4u\hat{I} -8u\hat{J})+(3u\hat{I} -6u\hat{J})+(-4u\hat{I} -9u\hat{J})$$

Al agrupar los términos semejantes se tiene:

$$\vec{V}_R= (7u\hat{I} - 4u\hat{I} + 3u\hat{I} - 4u\hat{I}) + (6u\hat{J} -8u\hat{J} -6u\hat{J} -9u\hat{J})$$

Si se saca factor común en cada uno de los paréntesis se llega a:

$$\vec{V}_R= (7 - 4 + 3 - 4)u\hat{I} + (6 - 8 - 6\ \ - 9)u\hat{J}$$

Al realizar las operaciones correspondientes en cada paréntesis se obtiene:

$$\vec{V}_R= 2u\hat{I} -17u\hat{J} = 2u\hat{I} +17u(-\hat{J})$$

Ejemplo 16.

Determine el vector resultante de la suma entre los siguientes vectores.

$$\vec{A}= -8u\hat{I};\ \vec{B}= 10u\hat{I};\ \vec{C}= 9u\hat{I};\ \vec{D}= -14u\hat{I}$$

Solución

Al expresar, inicialmente, la suma de los vectores como se indica en (19):

$$\vec{V}_R= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}= (-8u\hat{I}) + (10u\hat{I})+(9u\hat{I})+(-14u\hat{I})$$

Dado que todos los vectores a sumar pertenecen a la misma componente, se agrupan en un solo paréntesis:

$$\vec{V}_R= (-8u\hat{I} + 10u\hat{I} + 9u\hat{I} -14u\hat{I})$$

Al sacar factor común obtenemos que:

$$\vec{V}_R = (-8 + 10 + 9 - 14)u\hat{I}$$

Al realizar las operaciones indicadas en el paréntesis se obtiene, finalmente, la suma de los vectores, es decir:

$$\vec{V}_R = -3u\hat{I} = 3u(-\hat{I})$$

- **Resta de vectores**

Ahora bien, antes de entrar en detalle a analizar cómo se restan los vectores, se aclara que está operación no es más que una suma vectorial entre dos vectores, en la cual uno de ellos (vector a restar) se sustituye por su vector opuesto, es decir, por aquel vector cuya magnitud es igual al original, pero que su sentido es contrario [4], [20]. Una norma que se cumple entre estos vectores opuestos es que cuando medimos el ángulo subtendido entre ellos se encuentra siempre que el valor obtenido es de 180^0. De esto último se desprende otra regla muy importante entre ambos, y es que los vectores bases que los conforman, aunque sean simbólicamente el mismo, presentan signos contrarios. En sí, todo vector opuesto se representa con la misma letra del vector dado inicialmente (vector original), pero se le antepone el signo menos (-). Por ejemplo, el vector opuesto de $\vec{A}$ es $-\vec{A}$, ya que si $\vec{A} = 15\hat{I} - 12\hat{J}$ entonces $-\vec{A} = -15\hat{I} + 12\hat{J}$; o también $-\vec{A} = 15(-\hat{I}) + 12\hat{J}$.

Si analizamos en detalle el ejemplo anterior, podemos concluir que el vector opuesto a otro estará siempre conformado por las mismas componentes o coeficientes escalares del vector original, pero sus vectores unitarios son de signos contrarios al original, cumpliéndose la norma anotada. Todo esto se debe al signo negativo que lleva siempre antepuesto el denominado “vector opuesto”.

Para determinar la resta entre dos vectores —de modo análogo a la suma de un vector con el opuesto de otro vector— se tienen en cuenta los siguientes pasos:

- *Primero.* Escribimos la operación resta entre los dos vectores dados como una suma de vectores, de manera que queda uno de ellos expresado como un vector opuesto. La identificación y determinación del vector opuesto será de gran importancia para realizar la llamada “resta de vectores” planteada al inicio del problema.

- *Segundo*. Con base en el vector original dado al comienzo del problema del vector a restar, y al tener presente las leyes que se cumplen entre ellos, se determina su vector opuesto. Esto último se logra al cambiarle los signos a cada una de sus componentes vectoriales. Es decir, si la componente es positiva pasa a negativa y si es negativa pasa a positiva, generando esto el vector pedido.
- *Tercero*. El vector opuesto hallado y el otro vector implicado en la "resta" se suman normalmente. El resultado final de esta suma se le conoce como "la resta entre los dos vectores".

Según [4] y [5], la ecuación matemática vectorial que representa el vector resultante de la resta entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ esta dada por:

$$\vec{V}_R = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad (20)$$

Donde $\vec{V}_R$ representa el vector resultante de la resta de vectores.

Ejemplo 17.

Dados los vectores $\vec{A} = 6u\hat{I} - 8u\hat{J}$ y $\vec{B} = 7u\hat{I} - 5u\hat{J}$ halle el vector resultante de la resta $\vec{A} - \vec{B}$.

Solución

Al hacer uso de (20) tenemos:

$$\vec{V}_R = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Ahora el vector opuesto de $\vec{B}$ está dado por:

$$-\vec{B} = -7u\hat{I} + 5u\hat{J}$$

Al reemplazar el vector $\vec{A}$ y el opuesto del vector $\vec{B}$ en (20), la cual permite determinar el vector resultante de la resta de los dos vectores indicada al comienzo de la solución del ejercicio tenemos que:

$$\vec{V}_R = \vec{A} + (-\vec{B}) = (6u\hat{I} - 8u\hat{J}) + (-7u\hat{I} + 5u\hat{J})$$

Al agrupar términos semejantes se llega a:

$$\vec{V}_R = (6u\hat{I} - 7u\hat{I}) + (-8u\hat{J} + 5u\hat{J})$$

Al sacar factor común en cada uno de los paréntesis anteriores tenemos:

$$\vec{V}_R = (6-7)u\hat{\imath} + (-8+5)u\hat{\jmath}$$

Al realizar las operaciones indicadas dentro de los paréntesis se obtiene el vector resultante de la resta de los vectores:

$$\vec{V}_R = \vec{A} - \vec{B} = 1u\ (-\hat{\imath}) + 3u\ (-\hat{\jmath})$$

Ejemplo 18.

Dados los vectores $\vec{A} = 7u\hat{\imath} - 5u\hat{\jmath} - 9u\hat{k}$; $\vec{C} = 8u\hat{\imath} - 2u\hat{\jmath} + 10u\hat{k}$, halle el vector resultante de la resta $\vec{C} - \vec{A}$.

Solución

Al hacer uso de (20) tenemos:

$$\vec{V}_R = \vec{C} + (-A)$$

Ahora determinamos el vector opuesto de $\vec{A}$, es decir, $-\vec{A}$ así:

$$-\vec{A} = -7u\hat{\imath} + 5u\hat{\jmath} + 9u\hat{k}$$

Si se tiene en cuenta el resultado de arriba, se puede decir que el vector resultante de la resta de los vectores dados queda expresado así:

$$\vec{V}_R = (8u\hat{\imath} - 2u\hat{\jmath} + 10u\hat{k}) + (-7u\hat{\imath} + 5u\hat{\jmath} + 9u\hat{k})$$

Al agrupar términos semejantes se obtiene:

$$\vec{V}_R = (8u\hat{\imath} - 7u\hat{\imath}) + (-2u\hat{\jmath} + 5u\hat{\jmath}) + (10u\hat{k} + 9u\hat{k})$$

Al sacar factor común en cada paréntesis:

$$\vec{V}_R = (8-7)u\hat{\imath} + (-2+5)u\hat{\jmath} + (10+9)u\hat{k}$$

Al desarrollar las operaciones en cada paréntesis se obtiene el vector resultante de los vectores:

$$\vec{V}_R = \vec{C} - \vec{A} = 1u\hat{\imath} + 3u\hat{\jmath} + 19u\hat{k}$$

Ejemplo 19.

Dado los vectores $\vec{A}= -8u\hat{J}$ y $\vec{B}= 5u\hat{J}$ halle el vector resultante de la resta $\vec{B} - \vec{A}$.

Solución

Al expresar la "resta" de los dos vectores como una suma, según (20), para determinar el vector resultante de esta operación:

$$\vec{V}_R= \vec{B} + (-\vec{A})$$

Ahora determinamos el vector opuesto de $\vec{A}$, es decir:

$$-\vec{A} = 8u\hat{J}$$

Al reemplazar el vector $\vec{B}$ y el vector $-\vec{A}$ en la ecuación de arriba, que define el vector resultante de la resta entre ellos, se obtiene:

$$\vec{V}_R= \vec{B} - \vec{A} =5u\hat{J} +8u\hat{J}$$

Finalmente, tenemos que: $\vec{V}_R= 13u\hat{J}$.

Ejemplo 20.

Dado los vectores $\vec{M}= 7u\hat{J}$ y $\vec{N}= -8u\hat{k}$, halle $\vec{N} -\vec{M}$.

Solución

Expresamos la "resta" de los dos vectores como una suma de vectores, es decir:

$$\vec{V}_R= \vec{N} + (-\vec{M})$$

Ahora determinamos el vector opuesto de $\vec{M}$, es decir, a $-\vec{M}$, así: $-\vec{M}= -7u\hat{J}$.

Al reemplazar los vectores $-\vec{M}$ y $\vec{N}$ en la ecuación que define el vector resultante de la resta entre ellos, tenemos: $\vec{V}_R= -8uk + (-7u\hat{J})= -8uk -7u\hat{J}$.

Al pasarle el signo negativo a los vectores unitarios en la ecuación de arriba, finalmente se obtiene:

$$V_R= 8u(-k) + 7u(-J)$$

- **Producto punto**

Por su parte, el producto punto se representa con el símbolo que se muestra entre parentesis (ᵒ) y es una operación que se da solo entre vectores. Tiene su aplicación en la física cuando se habla del concepto de trabajo, el cual se explica más adelante. De acuerdo con [21], cuando hallamos el producto punto entre dos vectores lo que obtenemos como resultado es un valor (magnitud escalar), es decir, está operación no cumple con la llamada "ley clausurativa", ya que el resultado obtenido a través de ella no es un vector.

Según [16], existen dos formas de representar y determinar matemáticamente el producto punto entre dos vectores. La primera consiste en expresar su producto punto como la multiplicación entre los valores obtenidos de sus magnitudes y el coseno del ángulo subtendido entre ellos. En la Fig. 19 se muestran los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los cuales subtienden entre ellos un ángulo θ, por tanto, la ecuación matemática que define su producto punto esta dada por

$$\vec{A} \circ \vec{B} = ABCos\theta \tag{21}$$

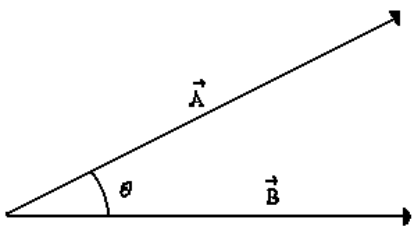


Figura 19. Representación de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo θ subtendido entre ellos. Fuente: elaboración propia

Así, (21) representa el producto punto entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

De (21), la cual define el producto punto entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se deduce que $\vec{A} \circ \vec{B}$=0, si θ toma los valores $\theta = 90^0$ o $\theta = 270^0$, para los cuales el Cos θ es igual a 0.

Ejemplo 21.

Determine el producto punto entre los vectores que se encuentran en el plano (*xy*), tal como se muestra en la Fig. 20.

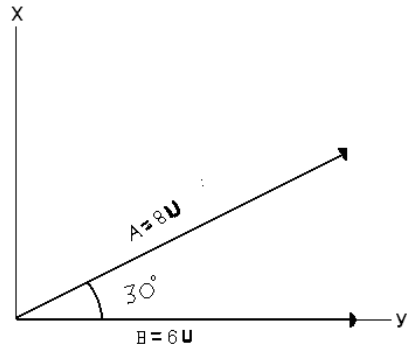


Figura 20. Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el plano (*xy*). Fuente: elaboración propia

Solución

Al hacer uso de (21) tenemos que:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = ABCos\theta = (8u)(6u)\ Cos30^o$$

Al multiplicar las magnitudes de los vectores y hallar el coseno del ángulo tenemos:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = 48u^2\ (0{,}866)$$

Al realizar la multiplicación indicada en la parte de arriba se obtiene el producto punto entre los vectores dados:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = 41{,}568\ u^2$$

Ejemplo 22.

Determine el producto punto entre los vectores que se muestran en el plano (*yz*), tal como se muestra en la Fig 21.

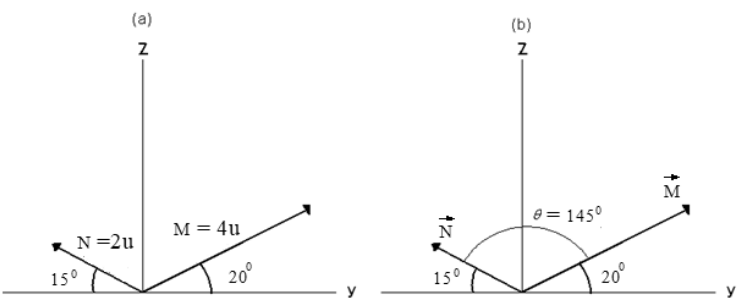


Figura 21. Vectores $\vec{M}$ y $\vec{N}$ en el plano (*yz*). Fuente: elaboración propia

Solución

Al utilizar (21) y tener presente los datos registrados en la Fig. 21 tenemos:

$$\vec{M} \circ \vec{N} = MNCos\theta = (4u)\ (2u)\ Cos145^{o}$$

Al sacar el coseno del ángulo y multiplicar las magnitudes de los vectores se obtiene:

$$\vec{M} \circ \vec{N} = 8u^{2}\,(-0{,}819)$$

Si se desarrolla la multiplicación indicada en la parte de arriba, se encuentra el valor del producto punto entre los vectores implicados en esta operación:

$$\vec{M} \circ \vec{N} = -6{,}553u^{2}$$

Según [5] y [16], la segunda forma para determinar el producto punto entre vectores consiste en expresar esta operación como una suma sucesiva de parejas de productos, los cuales resultan de multiplicar los respectivos coeficientes escalares de los vectores unitarios bases que integran los vectores a operar, tal como se muestra a continuación.

Dado los vectores:

$$\vec{A} = a_x\,\hat{I} + a_y\hat{J} + \vec{a}_z\hat{k} \text{ y } \vec{B} = b_x\hat{I} + b_y\hat{J} + b_z\hat{k}$$

Entonces, el producto punto entre ellos esta dado por:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (22)$$

Se puede concluir de (22), la cual define también el producto punto entre dos vectores, que el resultado de la operación no es un vector, sino un valor, ya que lo que se tiene es una suma de valores numéricos, lo que arrojara al final una cantidad.

Según [5], si se requiere determinar el ángulo subtendido θ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se hace uso de (21) y (22), obteniéndose con ellas la expresión:

$$Cos\theta = \left(\frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{AB} \right) \quad \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{AB}$$

Ahora, al hacer uso del coseno inverso se obtiene:

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{AB}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{AB}\right) \tag{23}$$

Así, (23) permite determinar el ángulo subtendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, donde A y B representan sus respectivas magnitudes.

Ejemplo 23.

a) Dados los vectores $\vec{A} = 2u\hat{I} + 6u\hat{J} + 4u\hat{k}$ y $\vec{B} = 3u(-\hat{I}) + 5u(-\hat{J}) + 9u\hat{k}$, determine el producto punto entre estos dos vectores; y b) el ángulo subtendido entre ellos.

Solución

a) Al tomar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, en el cuál este último se puede reescribir también de la siguiente manera $\vec{B} = -3u\hat{I} - 5u\hat{J} + 9u\hat{k}$, y según (22) se obtiene:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (2u)(-3u) + (6u)(-5u) + (4u)(9u)$$

Al desarrollar los productos indicados en la expresión de arriba, se obtiene:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = -6u^2 - 30u^2 + 36u^2$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la expresión de arriba, se concluye que el producto punto entre los dos vectores es igual a cero, así: $\vec{A} \circ \vec{B} = 0$.

b) Para determinar el ángulo subtendido entre los dos vectores tenemos que hacer uso de la (23), la cual esta definida por:

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{AB}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{AB}\right)$$

Primero, determinamos la magnitud de cada uno de los vectores implicados en la operación, así:

$$A = \sqrt{(2u)^2 + (6u)^2 + (4u)^2} = \sqrt{4u^2 + 36u^2 + 16u^2} = \sqrt{56}u$$

$$B = \sqrt{(-3u)^2 + (-5u)^2 + (9u)^2} = \sqrt{9u^2 + 25u^2 + 81u^2} = \sqrt{115}u$$

Al sustituir valores en (23) y simplificar términos semejantes, tenemos:

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{(2)(-3)+(6)(-5)+(4)(9)}{\sqrt{56}\,\sqrt{115}}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-6-30+36}{\sqrt{6440}}\right)$$

Por tanto, $\theta = \mathrm{Cos}^{-1}(0) = 90^0$

Es decir, $\theta = 90^0$.

Del valor obtenido de ángulo se puede decir que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son mutuamente perpendiculares entre sí por formar entre ellos un ángulo de 90^0.

Ejemplo 24.

a) Determine el producto punto y b) el ángulo subtendido entre los vectores $\vec{C} = 7u\hat{I} - 9u\hat{J}$ y $\vec{D} = -6u\hat{I} - 2u\hat{J}$.

Solución

a) Al aplicar (22), que define el producto punto entre vectores, tenemos:

$$\vec{C} \circ \vec{D} = (7u)(-6u) + (-9u)(-2u) = -42u^2 + 18u^2 = -24u^2$$

Es decir,

$$\vec{C} \circ \vec{D} = -24u^2$$

b) Para determinar el ángulo subtendido θ entre los dos vectores se hace uso de (23):

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\vec{C} \circ \vec{D}}{CD}\right)$$

Ahora, se hallan primero las magnitudes de los vectores implicados $\vec{C}$ y $\vec{D}$, así:

$$C = \sqrt{(7u)^2 + (-9u)^2} = \sqrt{49u^2 + 81u^2} = \sqrt{130}u$$

$$D = \sqrt{(-6u)^2 + (-2u)^2} = \sqrt{36u^2 + 4u^2} = \sqrt{40}u$$

Al reemplazar en (23) el valor de las magnitudes de los vectores, el resultado $\vec{C} \circ \vec{D} = -24u^2$ y simplificar términos semejantes, se obtiene:

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-24}{\sqrt{130}\,\sqrt{40}}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-24}{\sqrt{5200}}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}(-0.332820) = 109{,}44^{o}$$

Es decir, el ángulo subtendido entre los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ es de $\theta = 109{,}44^{0}$.

Ejemplo 25.

Dado los vectores $\vec{A} = -2u\hat{I}$ y $\vec{D} = 6u\hat{I}$, determine a) su producto punto: y b) el ángulo subtendido entre ellos.

Solución

a) Al aplicar (22), que define el producto punto entre vectores, tenemos:

$$\vec{A} \circ \vec{D} = (-2u)(6u)$$

Es decir,

$$\vec{A} \circ \vec{D} = -12u^{2}$$

b) Para determinar el ángulo subtendido θ entre los dos vectores se hará uso de (23):

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\vec{A} \circ \vec{D}}{AD}\right)$$

Por simple inspección se conoce que el valor de las magnitudes de los dos vectores es de:

$$A = 2u \text{ y } D = 6u$$

Si se reemplazan los valores previos de las operaciones que aparecen inmersas en (22), y se simplifican términos semejantes, se obtiene:

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-12}{(2)(6)}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-12}{12}\right) = \mathrm{Cos}^{-1}(-1) = 180^{o}$$

Es decir, el ángulo subtendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{D}$ es de $\theta = 180^{0}$.

Ejemplo 26.

a) Dados los vectores $\vec{C} = 4u\hat{I}$ y $\vec{D} = 5u\hat{J}$, determine el producto punto entre ellos.

Solución

Mediante (21), la cuál define el producto punto entre vectores, tenemos:

$$\vec{C} \circ \vec{D} = CD\ Cos\ \theta = (4u)(5u)Cos(90^o)$$

Al realizar las operaciones de multiplicación en la ecuación de arriba, tenemos:

$$\vec{C} \circ \vec{D} = (20u^2)(0) = 0$$

Se observa que el resultado es $\vec{C} \circ \vec{D} = 0$, ya que el ángulo subtendido entre los vectores unitarios $\hat{I}$ y $\hat{J}$ es de 90^0, debido a que son vectores mutuamente perpendiculares por pertenecer al sistema rectangular cartesiano.

- ### Producto cruz

Ahora bien, según [10] y [17], el operador del producto cruz o producto vectorial entre vectores se representa con el símbolo (X). Señalan también que el producto cruz entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está dado por la expresión $\vec{A} X \vec{B}$, de la cual surge un tercer vector $\vec{C}$. Además, al igual que el producto punto, esta es una operación que se lleva a cabo solo entre vectores. Una diferencia muy notable e importante entre ellos radica en que el producto cruz sí cumple con la ley clausurativa, es decir, el resultado de operar vectores con este tipo de operador genera otro vector, el cual siempre será perpendicular al plano formado por los dos vectores implicados en esta operación. En conclusión, todo vector que resulte del producto cruz entre dos vectores siempre será perpendicular a ellos. En la física mecánica este tipo de operación tiene aplicaciones de gran importancia, sobre todo, cuando se trata de definir observables físicos tales como el torque o la velocidad tangencial, entre otros. También en física eléctrica se da su aplicación en el concepto de fuerza magnética, la cual está representada por medio de este tipo de producto, etc.

De acuerdo con [5] y [17], el hecho de que el producto cruz entre dos vectores genere un vector perpendicular a ellos, como se mencionó, y, además, ya que los vectores bases en el sistema de coordenadas cartesiana son mutuamente perpendiculares entre sí, todo lo anterior nos lleva a deducir las siguientes expresiones matemáticas:

$$\begin{aligned} \hat{I} X \hat{J} &= \hat{K};\ \hat{J} X \hat{I} = -\hat{K};\ \hat{I} X \hat{I} = 0 \\ \hat{J} X \hat{K} &= \hat{I};\ \hat{K} X \hat{J} = -\hat{I};\ \hat{J} X \hat{J} = 0 \\ \hat{K} X \hat{I} &= \hat{J};\ \hat{I} X \hat{K} = -\hat{J};\ \hat{K} X \hat{K} = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

De (24) se deduce que el producto cruz no cumple con la propiedad conmutativa, ya que, por ejemplo, $\hat{I}\ X\ \hat{J} \neq \hat{J}\ X\ \hat{I}$, tal como se observa en la parte de arriba, etc. Ahora, al igual que para el producto punto, existen dos formas muy utilizadas que permiten determinar matemáticamente el producto cruz entre los vectores [5]. La primera de ellas consiste en operar directamente los vectores utilizando la propiedad distributiva del operador cruz (X), si se tiene presente, además, que no se debe cambiar el orden operacional de los vectores o de sus componentes vectoriales implicados en la operación, ya que —como se mencionó— esta no cumple con la propiedad conmutativa.

A continuación, se detallan los procedimientos generales utilizados para la determinación del producto cruz entre vectores. Supongamos, inicialmente, que se quiere determinar el producto cruz entre los siguientes vectores:

$$\vec{A}= a_x\ \hat{I} + a_y\ \hat{J} + a_z\hat{\mathrm{k}};\ \vec{B}= b_x\hat{I} + b_y\ \hat{J} + b_z\hat{\mathrm{k}}$$

Entonces, tenemos que:

$$\vec{A}X\vec{B}= (a_x\ \hat{I} + a_y\ \hat{J} + a_z\hat{\mathrm{K}})\ X\ (b_x\hat{I} + b_y\ \hat{J} + b_z\hat{\mathrm{K}})$$

Al utilizar la propiedad distributiva del producto cruz entre vectores tenemos:

$$\vec{A}X\vec{B}= (a_x\hat{I} + a_y\ \hat{J} + a_z\hat{\mathrm{k}})\ x\ (b_x\hat{I}) + (a_x\hat{I} + a_y\ \hat{J} + a_z\hat{\mathrm{k}})\ x\ (b_y\ \hat{J}) + (a_x\hat{I} + a_y\ \hat{J} + a_z\hat{\mathrm{k}})\ x\ (b_z\hat{\mathrm{k}})$$

Si se vuelve a hacer uso de la propiedad distributiva y se organizan los productos cruz indicados entre los vectores bases, se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{A}X\vec{B}= {} & a_xb_x(\hat{I}x\hat{I}) + a_xb_y(\hat{I}x\hat{J}) + a_xb_z(\hat{I}x\hat{\mathrm{k}}) + a_yb_x(\hat{J}x\hat{I}) + a_yb_y(\hat{J}x\hat{J}) + a_yb_z(\hat{J}x\hat{\mathrm{k}}) \\ & + a_zb_x(\hat{\mathrm{k}}x\hat{I}) + a_zb_y(\hat{\mathrm{k}}x\hat{J}) + a_zb_z(\hat{\mathrm{k}}x\hat{\mathrm{k}})\end{aligned}$$

Observe que en los pasos anteriores se conservó el orden operacional de las componentes vectoriales. Ahora, al tener presente las identidades de los productos cruz expresadas en (24), se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{A}X\vec{B}= {} & a_xb_x(0) + a_xb_y(\hat{\mathrm{k}}) + a_xb_z(-\hat{\mathrm{J}}) + a_yb_x(-\hat{\mathrm{k}}) + a_yb_y(0) + a_yb_z(\hat{I}) \\ & + a_zb_x(\hat{\mathrm{J}}) + a_zb_y(-\hat{I}) + a_zb_z(0)\end{aligned}$$

Es decir:

$$\vec{A}X\vec{B}= a_x b_y \hat{K} - a_x b_z \hat{J} - a_y b_x \hat{K} + a_y b_z \hat{I} + a_z b_x \hat{J} - a_z b_y \hat{I}$$

Al agrupar términos semejantes tenemos:

$$\vec{A}X\vec{B}= (a_y b_z \hat{I} - a_z b_y \hat{I}) + (a_z b_x \hat{J} - a_x b_z \hat{J}) + (a_x b_y \hat{K} - a_y b_x \hat{K})$$

Si se saca factor común en cada paréntesis se obtiene, finalmente, la expresión que representa el producto cruz entre los vectores dados, es decir:

$$\vec{A}X\vec{B}= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{I} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{J} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{K} \tag{25}$$

Así, (25), según [2], nos permite determinar el producto cruz entre dos vectores, conocidas sus respectivas componentes vectoriales rectangulares.

Ejemplo 27.

a) Determine el producto cruz de los vectores

$$\vec{A}= 5u\hat{I} + 2u\hat{J} - 3u\hat{k} \text{ y } \vec{B}= 6u\hat{I} - 4uJ - 7u\hat{k}.$$

Solución

Inicialmente, reconocemos el valor del coeficiente que multiplica a cada vector base que compone al vector dado, así:

$$a_x= 5u;\ a_y= 2u;\ a_z= -3u \text{ y } b_x= 6u;\ b_y= -4u;\ b_z= -7u$$

Ahora, al reemplazar estos valores en (25), dada por:

$$\vec{A}X\vec{B}= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{I} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{J} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{K}$$

Se llega a lo siguiente:

$$\vec{A}X\vec{B}=[(2u)(-7u)-(-3u)(-4u)]\ \hat{I} + [(-3u)(6u)-(5u)(-7u)]\ \hat{J} + [(5u)(-4u)- (2u)(6u)]\ \hat{k}$$

Por tanto,

$$\vec{A}X\vec{B}= [-14u^2-12u^2]\ \hat{I} + [-18u^2 + 35u^2]\ \hat{J} + [-20u^2 - 12u^2]\hat{k}$$

Luego, la solución final es:

$$\vec{A}X\vec{B} = -26u^2\,\hat{I} + 17u^2\,\hat{J} - 32u^2\,\hat{k}$$

Ejemplo 28.

a) Determine el producto ($\vec{C}X\vec{D}$) de los siguiente vectores:

$$\vec{C} = -2u\hat{I} + 4u\hat{J} - 9u\hat{k} \;\text{ y }\; \vec{D} = 7u\hat{I} - 3u\hat{J} + 5u\hat{k}.$$

Solución

Al identificar el valor del coeficiente escalar que multiplica a cada vector base que compone el respectivo vector dado, tenemos:

$$C_x = -2u;\; C_y = 4u;\; C_z = -9u;\; d_x = 7u;\; d_y = -3u;\; d_z = 5u$$

Ahora, si se tiene presente (25), se reemplazan los valores determinados en la parte de arriba en esta, tal como se muestra a continuación:

$$\vec{C}X\vec{D} = (c_y d_z - c_z d_y)\hat{I} + (c_z d_x - c_x d_z)\hat{J} + (c_x d_y - c_y d_x)\hat{k}$$

Entonces,

$$\vec{C}X\vec{D} = [(4u)(5u) - (-9u)(-3u)]\,\hat{I} + [(-9u)(7u) - (-2u)(5u)]\,\hat{J} + [(-2u)(-3u) - (4u)(7u)]\hat{k}$$

Por tanto,

$$\vec{C}X\vec{D} = [20u^2 - 27u^2]\hat{I} + [-63u^2 + 10u^2]\,\hat{J} + [6u^2 - 28u^2\,]\hat{k}$$

Finalmente, se obtiene que:

$$\vec{C}X\vec{D} = 7u^2\,(-\hat{I}) + 53u^2\,(-\hat{J}) + 22u^2(-\hat{k})$$

Ejemplo 29.

a) Dado los vectores $\vec{P} = 7u\hat{I} - 5u\hat{J} + 2u\hat{k}$ y $\vec{Q} = -2u\hat{I} + 2u\hat{k}$ determine el producto $\vec{P}X\vec{Q}$:

Solución

Los coeficientes numéricos de los vectores bases dados tienen los siguientes valores: $p_x = 7u;\; p_y = -5u;\; p_z = 2u;\; q_x = -2u;\; q_y = 0;\; q_z = 2u$.

Ahora bien, al reemplazar estos valores en (25), equivalente para este producto, se obtiene:

$$\vec{P}X\vec{Q}= [(-5u)(2u)-(2u)(0)]\hat{I} + [(2u)(-2u)-(7u)(2u)]\,\hat{J} + [(7u)(0)-(-5u)(-2u)]\hat{k}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\vec{P}X\vec{Q}= [-10u^2-0]\,\hat{I} + [-4u^2-14u^2]\,\hat{J} + [0\text{-}10u^2\,]\hat{k}$$

Finalmente, se obtiene:

$$\vec{P}X\vec{Q}= -10u^2\,\hat{I} -18u^2\,\hat{J} -10u^2\hat{k}$$

Ejemplo 30.

a) Dado los vectores $\vec{M}= -2u\hat{J} +7u\hat{k}$ y $\vec{N}= -1u\hat{I}-6u\hat{k}$ determine el producto $\vec{M}X\vec{N}$.

Solución

Los coeficientes o valores que multiplican a los vectores base de cada vector son:

$$m_x= 0;\; m_y= -2u;\; m_z= 7u;\; n_x= -1u;\; n_y= 0;\;\; n_z= -6u$$

Al hacer uso de (25) se obtiene:

$$\vec{M}X\vec{N}= [(-2u)(-6u) - (7u)(0)]\hat{I} + [(7u)(-1u) - (0)(-6u)]\,\hat{J}+[(0)(0)-(-2u)(-1u)]\hat{k}$$

Si se desarrollan las operaciones en la expresión de arriba, tenemos:

$$\vec{M}X\vec{N}= [12u^2-0]\hat{I} + [-7u^2-0]\,\hat{J} + [0-2u^2]\hat{k}$$

Por tanto, se obtiene que:

$$\vec{M}X\vec{N}= 12u^2\,\hat{I} -7u^2\hat{J} + 2u^2\hat{k}$$

La segunda forma para determinar el producto cruz entre dos vectores que se encuentren en el espacio consiste en expresarlo por medio de un determinante de 3x3, en el que su primera fila está compuesta por los vectores bases que componen a los vectores implicados en el producto, y la segunda y tercera fila por sus respectivos coeficientes numéricos. Es necesario tener presente —como se describió— el orden o el lugar que ocupa cada vector en la operación, con el fin de no cometer errores de tipo operacionales, tal como se detalla a continuación.

Dados los vectores $\vec{A}= a_x\hat{I} + a_y\hat{J} + a_z\hat{k}$ y $\vec{B}= b_x\hat{I} + b_y\hat{J} + b_z\hat{k}$, el producto cruz entre ellos se define de manera más compacta a través del siguiente determinante [5]:

$$\vec{A}X\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{I} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{J} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \tag{26}$$

Ahora bien, (25) y (26) difieren en el signo y en el orden de los términos que integran sus segundas componentes vectoriales, pero en sí estas son equivalentes. Además, cada uno de estos términos que se encuentran en los paréntesis se hallan con base en el determinante planteado en los diferentes productos cruz que se presenten. Por ejemplo, la expresión $(a_y\, b_z - a_z\, b_y)$ queda definida al multiplicar en diagonal las componentes que no hacen parte de la fila y de la columna que contienen al vector unitario $\hat{I}$ en el determinante que define al producto cruz $\vec{A}X\vec{B}$, tal como se muestra en el siguiente esquema de la Fig. 22.

$$\begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Figura 22. Determinante de las componentes de los vectores y esquema indicativo de como se sacan los coeficientes de los vectores unitarios en el producto cruz entre vectores.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [5], durante el proceso operativo no se debe olvidar que siempre se colocará de primero el producto de los términos que se encuentran en la diagonal que va de izquierda a derecha, y se le restará el producto de los términos que conforman la diagonal que va de derecha a izquierda, así:

$$(a_y\, b_z - a_z\, b_y)\hat{I}$$

De la misma manera, es decir, bajo las mismas normas y lineamientos, se procede para determinar los demás paréntesis definidos en el producto cruz. A continuación, se desarrollan algunos ejemplos con el fin de afianzar más el conocimiento del método tratado.

Ejemplo 31.

Halle el producto $\vec{A}X\vec{B}$ con $\vec{A}= 5u\hat{I} -5u\hat{J} + 8u\hat{k}$ y $\vec{B}= 2u\hat{I} - 7u\hat{J} - 9u\hat{k}$.

Solución

Mediante (26):

$$\vec{A}X\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{I} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{J} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Con $a_x = 5u$; $a_y = -5u$; $a_z = 8u$ y $b_x = 2u$; $b_y = -7u$; $b_z = -9u$, tenemos:

$$\vec{A}X\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ 5u & -5u & 8u \\ 2u & -7u & -9u \end{vmatrix}$$

Es decir,

$$\vec{A}X\vec{B}= [(-5u)(-9u) - (8u)(-7u)]\,\hat{I} - [(5u)(-9u)-(8u)(2u)]\,\hat{J} + [(5u)(-7u) - (-5u)(2u)]\hat{k}$$

Si se realizan las multiplicaciones indicadas dentro de cada corchete en la expresión de arriba, se obtiene:

$$\vec{A}X\vec{B}= [45u^2 + 56u^2]\hat{I} - [-45u^2 - 16u^2]\hat{J} + [-35u^2+10u^2]\hat{k}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas en cada corchete y si se tiene presente la destrucción de estos por medio de la ley de los signos, se obtiene el resultado del producto cruz entre los vectores dados, es decir:

$$\vec{A}X\vec{B}= 101u^2\hat{I} + 61u^2\hat{J} - 25u^2\hat{k}$$

Ejemplo 32.

Muestre que el vector $\vec{C}= 46u^2\hat{I} + 18u^2\hat{J} - 11u^2\hat{k}$ es el vector que resulta del producto cruz entre los vectores $\vec{M}= 3u\hat{I} - 4u\hat{J} + 6u\hat{k}$ y $\vec{N}= 4u\hat{I} - 9u\hat{J} + 2u\hat{k}$.

Solución

Si se aplica, inicialmente, (26), la cual define el producto cruz entre vectores, tenemos:

$$\vec{M}X\vec{N}=\begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ 3u & -4u & 6u \\ 4u & -9u & 2u \end{vmatrix} = [(-4u)(2u)-(6u)(-9u)]\hat{I}-[(3u)(2u)-(6u)(4u)]\hat{J}+[(3u)(-9u)-(-4u)(4u)]\hat{k}$$

Al desarrollar las multiplicaciones indicadas en cada corchete en la expresión de arriba se tiene:

$$\vec{M}X\vec{N}=[-8u^2+54u^2]\hat{I}-[6u^2-24u^2]\hat{J}+[-27+16u^2]\hat{k}$$

Si se resuelven las operaciones indicadas en cada corchete y se tiene presente la ley de los signos en su destrucción, se llega a:

$$\vec{M}X\vec{N}= 46u^2\hat{I}+18u^2\hat{J}-11u^2\hat{k}$$

Del resultado anterior se prueba que $\vec{C}=\vec{M}XN$.

Ejemplo 33.

Dados los vectores $\vec{A}=-3u\hat{I}+5u\hat{J}-7u\hat{k}$ y $\vec{B}=2u\hat{I}-4u\hat{J}+6u\hat{k}$ halle un vector $\vec{C}$ perpendicular a ellos.

Solución

Para determinar el vector $\vec{C}$ que sea perpendicular tanto al vector $\vec{A}$ como al vector $\vec{B}$ se procede a desarrollar el producto cruz entre estos últimos, ya que —como es de conocimiento— todo producto cruz entre vectores genera un vector perpendicular a los vectores implicados en dicha operación. Luego, al tener en cuenta (26), tenemos:

$$\vec{A}X\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ -3u & 5u & -7u \\ 2u & -4u & 6u \end{vmatrix} = [(5u)(6u)-(-7u)(-4u)]\hat{I}-[(-3u)(6u)-(-7u)(2u)]\hat{J}+[(-3u)(-4u)-(5u)(2u)]\hat{k}$$

Al desarrollar los productos indicados en cada corchete en la expresión de arriba se obtiene:

$$\vec{C}=\vec{A}X\vec{B}=[30u^2-28u^2]\hat{I}-[-18u^2+14u^2]\hat{J}+[12u^2-10u^2]\hat{k}$$

Al realizar las operaciones indicadas en cada uno de los corchetes, destruir estos últimos y, además, tener en cuenta la ley de los signos, se obtiene, finalmente, el vector $\vec{C}$ que es perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{C}= 2u^2\,\hat{I} + 4u^2\,\hat{J} + 2u^2\hat{k}$$

Ejemplo 34.

a) Encuentre un vector que sea perpendicular a los vectores $\vec{M}= 1u\hat{I} - 2u\hat{J} - 3u\hat{k}$ y $\vec{N}= -4u\hat{I} + 4u\hat{J} - 5u\hat{k}$ y muestre su perpendicularidad con ellos.

Solución

Un vector $\vec{P}$ perpendicular a los dos vectores $\vec{M}$ y $\vec{N}$ está dado, según (26), por:

$$\vec{P}=\begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ 1u & -2u & -3u \\ -4u & 4u & -5u \end{vmatrix} =[(-2u)(-5u) - (-3u)(4u)]\hat{I} - [(1u)(-5u) - (-3u)(-4u)]\hat{J}+ [(1u)(4u) - (-2u)(-4u)]\hat{k}$$

Al realizar las multiplicaciones indicadas dentro de los corchetes en la ecuación de arriba tenemos:

$$\vec{P}=[10u^2 + 12u^2]\hat{I} - [-5u^2 - 12u^2]\hat{J} + [4u^2 - 8u^2]\hat{k}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas de resta y suma de términos en cada una de las componentes vectoriales y destruir corchetes se obtiene:

$$\vec{P}= 22u^2\hat{I} + 17u^2\hat{J} - 4u^2\hat{k}$$

Para demostrar que $\vec{P}$ es un vector perpendicular a los vectores $\vec{M}$ y $\vec{N}$ realizamos el producto punto entre él y ellos, así:

$$\vec{P}\circ\vec{M} = (22u^2\hat{I} + 17u^2\hat{J} - 4u^2\hat{k})^\circ(1u\hat{I} - 2u\hat{J} - 3u\hat{k})$$

$$\vec{P}\circ\vec{N} = (22u^2\hat{I} + 17u^2\hat{J} - 4u^2\hat{k})\circ(-4u\hat{I} + 4u\hat{J} - 5u\hat{k})$$

Al desarrollar el producto punto indicado en la parte de arriba se llega:

$$\vec{P}\circ\vec{M} = (22u^2)(1u) + (17u^2)(-2u) + (-4u^2)(-3u)= 22u^3 - 34u^3 + 12u^3= 0$$

$$\vec{P}\circ\vec{N}= (22u^2)(-4u) + (17u^2)(4u) + (-4u^2)(-5u)= -88u^3 + 68u^3 + 20u^3= 0$$

Dado que el resultado del producto punto entre el vector $\vec{P}$ y los vectores $\vec{M}$ y $\vec{N}$ dio cero, entonces se concluye que los últimos dos vectores son perpendiculares al primero.

De los ejemplos anteriores, y de acuerdo con [5], se puede concluir que siempre que se realiza un producto cruz entre dos vectores coplanares lo que se determina con esta operación es el vector de área delimitada entre ellos. Lo anterior nos lo indica la unidad de medida del vector que resulta de esta operación. Además, si al vector resultante del producto cruz de vectores se le realiza el producto punto con un tercer vector no coplanar con los vectores a los cuales se les realizó el producto (X), el resultado que se obtiene es un volumen.

Ahora bien, de acuerdo con [2], [5] y [17], la magnitud del producto cruz entre dos vectores se define a través de la siguiente expresión matemática (téngase presente la Fig. 22).

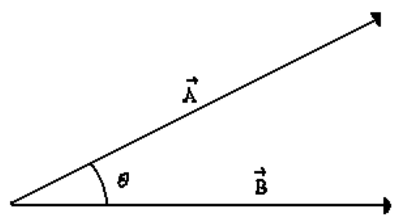


Figura 23. Angulo subtendido θ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Fuente: elaboración propia

$$\left|\vec{A} X \vec{B}\right| = AB\operatorname{sen}\theta \tag{27}$$

Donde,

- $\left|\vec{A} X \vec{B}\right|$: representa la magnitud del vector que resulta del producto cruz indicado.
- A: representa la magnitud del vector $\vec{A}$.
- B: representa la magnitud del vector $\vec{B}$.
- θ: es el ángulo subtendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Así, (27), además de determinar la magnitud del producto cruz entre dos vectores, nos permite hallar el ángulo subtendido entre ellos, sobre todo, cuando estos se encuentran definidos explícitamente en términos de sus vectores bases, caso en el cual podemos encontrar el vector que resulta del producto cruz entre ellos y determinar igualmente su magnitud, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 35.

a) Determine el ángulo subtendido entre los vectores
$\vec{P} = 6u\hat{I} - 5u\hat{J} + 9u\hat{k}$ y $\vec{Q} = 2u\hat{I} - 2u\hat{J} - 3u\hat{k}$.

Solución

Al hacer uso de (26) se determina inicialmente el producto cruz entre los dos vectores, así:

$$\vec{P} X \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ 6u & -5u & 9u \\ 2u & -2u & -3u \end{vmatrix} = [(-5u)(-3u) - (9u)(-2u)]\hat{I} - [(6u)(-3u) - (9u)(2u)]\hat{J} + [(6u)(-2u) - (-5u)(2u)]\hat{k}$$

Si se desarrollan las multiplicaciones indicadas en cada corchete de las componentes vectoriales tenemos:

$$\vec{P} X \vec{Q} = [15u^2 + 18u^2]\hat{I} - [-18u^2 - 18u^2]\hat{J} + [-12u^2 + 10u^2]\hat{k}$$

Si se realizan las operaciones de suma y resta indicadas en cada uno de los corchetes de las componentes vectoriales e igualmente su destrucción, tenemos:

$$\vec{P} X \vec{Q} = 33u^2\hat{I} + 36u^2\hat{J} - 2u^2\hat{k}$$

Ahora se procede a determinar las magnitudes de los vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{P} X \vec{Q}$, así:

$$P = \sqrt{(6u)^2 + (-5u)^2 + (9u)^2} = \sqrt{36u^2 + 25u^2 + 81u^2} = \sqrt{142}u$$

$$Q = \sqrt{(2u)^2 + (-2u)^2 + (-3u)^2} = \sqrt{4u^2 + 4u^2 + 9u^2} = \sqrt{17}u$$

$$\left|\vec{P} X \vec{Q}\right| = \sqrt{(33u^2)^2 + (36u^2)^2 + (-2u^2)^2} = \sqrt{1089u^4 + 1296u^4 + 4u^4} = \sqrt{2389}u^2$$

Al despejar el Sen(θ) de (27) se obtiene:

$$\text{sen}\theta = \frac{\left|\vec{P} X \vec{Q}\right|}{PQ}$$

Si se reemplazan las magnitudes vectoriales determinadas en la ecuación de arriba y se simplifican términos semejantes, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2389}}{\sqrt{142}\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2389}}{\sqrt{2414}} = \frac{\sqrt{2389}}{2414} = \sqrt{0{,}9896} = 0{,}99$$

Al aplicarle a la ecuación anterior el seno inverso, tenemos:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}99) = 81{,}89^{o}$$

Es decir, el valor del ángulo subtendido entre los vectores dados es de:

$$\theta = 81{,}89^{o}$$

Ejemplo 36.

a) Dados los vectores en el plano (yz); $\vec{M} = 2u\hat{j} - 6u\hat{k}$ y $\vec{N} = 3u\hat{j} + 8u\hat{k}$, determine el ángulo subtendido entre estos dos vectores.

Solución

Se determina inicialmente el vector que resulta del producto cruz entre los vectores dados al hacer uso de (26).

$$\vec{M}X\vec{N} = [(2u)(8u) - (-6u)(3u)]\hat{i} - [(0)(8u) - (-6u)(0)]\hat{j} + [(0)(3u) - (2u)(0)]\hat{k}$$

Al desarrollar las multiplicaciones indicadas en cada corchete de las componentes vectoriales en la ecuación de arriba tenemos:

$$\vec{M}X\vec{N} = [16u^2 + 18u^2]\hat{i} - [0-0]\hat{j} + [0-0]\hat{k}$$

Es decir:

$$\vec{M}X\vec{N} = 34u^2\hat{i}$$

Ahora se determinan las magnitudes de los vectores $\vec{M}$, $\vec{N}$ y $\vec{M}X\vec{N}$:

$$|\vec{M}X\vec{N}| = 34u^2$$

$$M = \sqrt{(2u)^2 + (-6u)^2} = \sqrt{4u^2 + 36u^2} = \sqrt{40}u$$

$$N = \sqrt{(3u)^2 + (8u)^2} = \sqrt{9u^2 + 64u^2} = \sqrt{73}u$$

Al reemplazar los valores anteriores en la expresión $\text{sen}\theta = \dfrac{|\vec{M}X\vec{N}|}{MN}$ se obtiene:

$$\text{sen}\theta = \frac{34}{\sqrt{40}\ \sqrt{73}} = \frac{34}{\sqrt{2920}} = \frac{34}{54{,}03} = 0{,}629$$

Aplicándole el seno inverso a la ecuación de arriba, se halla el siguiente valor de ángulo: $\theta = 38{,}99^{\circ}$.

Ejemplo 37.

a) Dado los vectores en el plano (xz) $\vec{S} = -2u\hat{I} + 4u\hat{k}$ y $\vec{D} = 4u\hat{I} - 6u\hat{k}$ y determine el ángulo subtendido entre estos dos vectores.

Solución

AL hacer uso de (26) se determina, inicialmente, el vector que resulta del producto cruz entre los vectores, así:

$$\vec{S}X\vec{D} = [(0)(-6u) - (4u)(0)]\hat{I} - [(-2u)(-6u) - (4u)(4u)]\hat{J} + [(-2u)(0) - (0)(4u)]\hat{k}$$

Al desarrollar las multiplicaciones indicadas en cada uno de los corchetes que hacen parte de las componentes vectoriales en la ecuación de arriba, tenemos:

$$\vec{S}X\vec{D} = [0 + 0]\hat{I} - [12u^2 - 16u^2]\hat{J} + [0\text{-}0]\hat{k}$$

Es decir:

$$\vec{S}X\vec{D} = -4u^2\hat{J} = 4u^2(-\hat{J})$$

Ahora se determinan las magnitudes de los vectores $\vec{S}$, $\vec{D}$ y $\vec{S}X\vec{D}$

$$|SX\vec{D}| = 4u^2$$

$$S = \sqrt{(-2\text{u})^2 + (4\text{u})^2} = \sqrt{4u^2 + 16u^2} = \sqrt{20}u$$

$$D = \sqrt{(4\text{u})^2 + (-6\text{u})^2} = \sqrt{16u^2 + 36u^2} = \sqrt{52}u$$

Al reemplazar los valores anteriores en la expresión $\text{sen}\theta = \dfrac{|\vec{S}X\vec{D}|}{SD}$ se obtiene:

$$\text{sen}\theta = \frac{4}{\sqrt{20}\ \sqrt{52}} = \frac{4}{\sqrt{1040}} = \frac{4}{32{,}249} = 0{,}124$$

Al aplicar sen^{-1} para hallar θ tenemos:

$$\theta = \text{Sen}^{-1}(0{,}124)$$

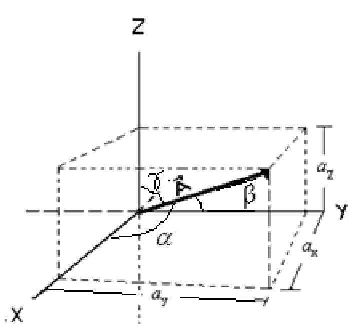
Es decir:

$$\theta = 7{,}12^{\circ}$$

C. Resumen Unidad 2

A continuación, se sintetizan aspectos relevantes de la unidad en los siguientes puntos:

- *Magnitud escalar.* Es la que solo necesita de un valor y de una unidad de medida para quedar completamente especificada. Como ejemplo de este tipo de magnitudes u observables físicos tenemos: la masa, la longitud, el tiempo, la temperatura, el trabajo, la energía, etc.
- *Magnitud vectorial.* Esta magnitud queda especificada cuando, además de su valor numérico y de la unidad de medida utilizada, se le adiciona un sentido y una dirección. El desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el torque, el momento, etc., son ejemplos de ella.
- *Dimensión de vectores.* Los vectores, de acuerdo con su número de componentes, se clasifican en vectores en una dimensión (un componente), dos dimensiones (dos componentes), tres dimensiones (tres componentes).



$$\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

Figura 24. Representación gráfica y algebraica vectorial de un vector $\vec{A}$.
Fuente: elaboración propia

Magnitud del vector $\vec{A}$:

$$A=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Vectores bases unitarios del sistema espacial cartesiano:

$$\hat{I}, \hat{J}, \hat{k}, -\hat{I}, -\hat{J}, -\hat{k}$$

Vector $\vec{A}$ en términos de los cosenos directores y los vectores unitarios bases:

$$\vec{A}= A[Cos(\alpha)\hat{I} + Cos(\beta)\hat{J} + Cos(\gamma)\hat{k}]$$

Vector unitario del vector $\vec{A}$:

$$\hat{A}= \frac{\vec{A}}{A} \text{ o } \hat{r}_A= Cos(\alpha)\hat{I} + Cos(\beta)\hat{J} + Cos(\gamma)\hat{k}$$

Donde α, β, y γ son los ángulos de dirección del vector $\vec{A}$ (véase la Fig. 23).

- *Operaciones en los vectores.* Las operaciones definidas en los vectores son la suma, el producto punto y el producto cruz. La suma y el producto vectorial entre vectores generan otro vector, mientras que el producto punto entre ellos generan un escalar.

  Por ejemplo, dado los $\vec{A}= a_x\hat{I} + a_y\hat{J} + a_z\hat{k}$ y $\vec{B}= b_x\hat{I} + b_y\hat{J} + b_z\hat{k}$.

  Suma: $\vec{A} + \vec{B}= (a_x + b_x)\hat{I} + (a_y + b_y)\hat{J} + (a_z + b_z)\hat{k}$.

  Producto punto: $\vec{A} \circ \vec{B}= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = C$. C: es un escalar o valor.

  Producto cruz: $\vec{A}X\vec{B}= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{I} -(a_xb_z - a_zb_x)\hat{J} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$.

D. Ejercicios de aplicación

1) Problemas de representación vectorial algebraica de un vector

a. Represente el vector $\vec{A}$ mostrado en la Fig. 25, en forma algebraica vectorial.

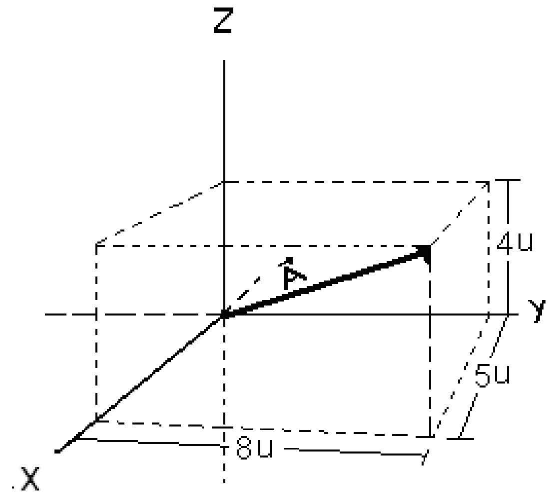


Figura 25. Vector $\vec{A}$ en el espacio. Fuente: elaboración propia

b. Represente el vector $\vec{B}$ mostrado en la Fig 26, en forma algebraica vectorial.

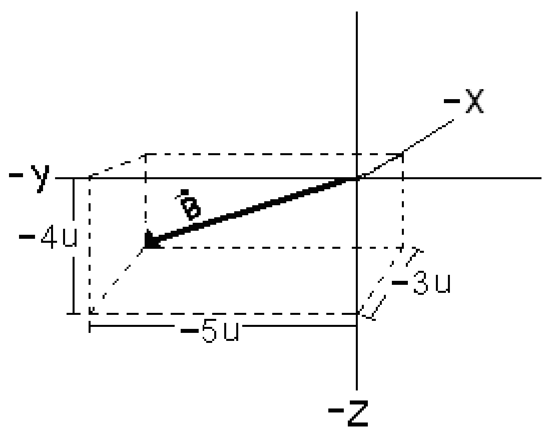


Figura 26. Vector $\vec{B}$ en el espacio. Fuente: elaboración propia

c. Represente el vector $\vec{C}$ mostrado en la Fig. 27, en forma algebraica vectorial.

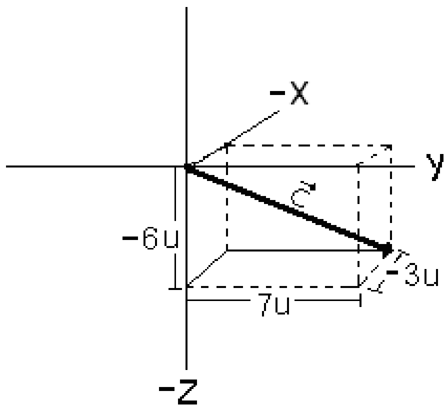


Figura 27. Vector $\vec{C}$ en el espacio. Fuente: elaboración propia

d. Represente el vector $\vec{D}$ mostrado en la Fig. 28, en forma algebraica vectorial

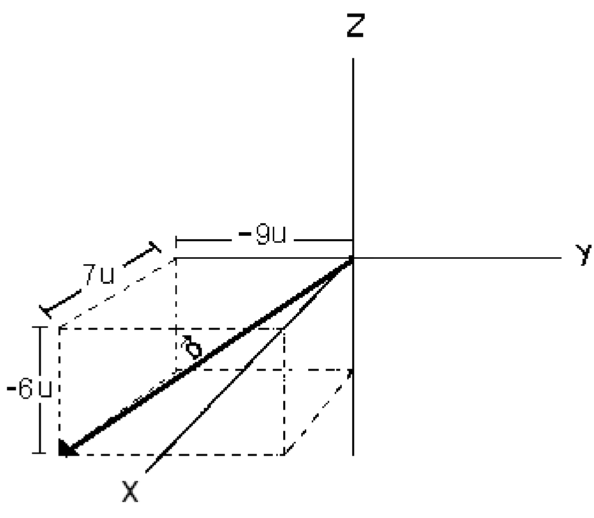


Figura 28. Vector $\vec{D}$ en el espacio. Fuente: elaboración propia

e. Represente el vector $\vec{P}$ mostrado en la Fig. 29, de forma algebraica vectorial.

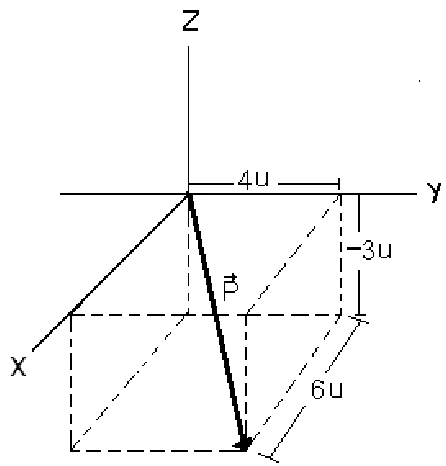


Figura 29. Vector $\vec{P}$ en el espacio. Fuente: elaboración propia

f. Represente el vector $\vec{Q}$ mostrado en la Fig. 30, de forma algebraica vectorial.

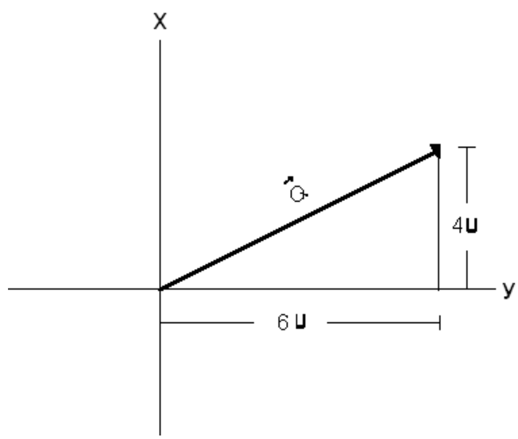


Figura 30. Vector $\vec{Q}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

g. Represente el vector $\vec{R}$ mostrado en la fig. 31, de forma algebraica vectorial.

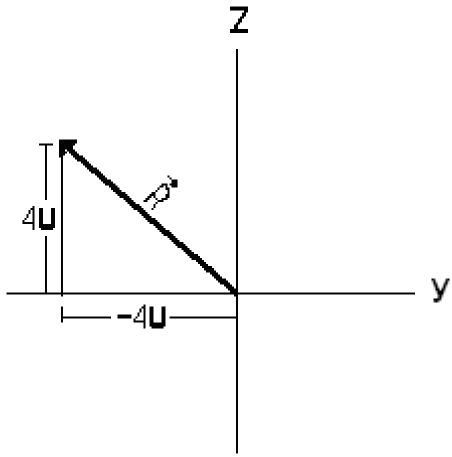


Figura 31. Vector $\vec{R}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

h. Represente el vector $\vec{S}$ mostrado en la Fig. 32, de forma algebraica vectorial.

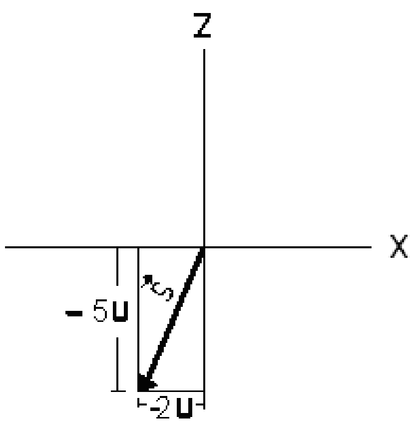


Figura 32. Vector $\vec{S}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

i. Represente el vector $\vec{T}$ mostrado en la Fig. 33, en forma algebraica vectorial.

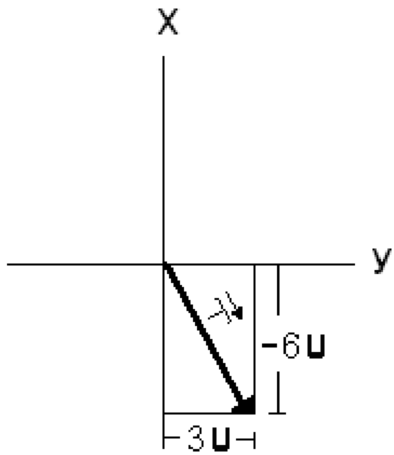


Figura 33. Vector $\vec{T}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

j. Represente el vector $\vec{V}$ mostrado en la Fig. 34, de forma algebraica vectorial.

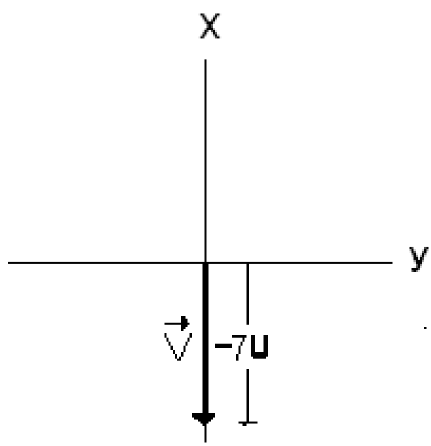


Figura 34. Vector $\vec{V}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

2) Problemas de magnitud vectorial

a. Determinar el módulo del vector $\vec{A} = 3\hat{I} + 5\hat{J} + 8\hat{K}$.

b. Determinar el módulo del vector $\vec{B} = -2\hat{I} + 6\hat{J} - 8\hat{K}$.

c. Determinar el módulo del vector $\vec{C} = 4\hat{I} - 6\hat{J} - 5\hat{K}$.

d. Determinar el módulo del vector $\vec{D} = -\frac{1}{2}\hat{I} - \frac{3}{4}\hat{J} + \frac{5}{8}\hat{K}$.

e. Determinar el módulo del vector $\vec{E} = \sqrt{3}\hat{I} - 2\hat{J} - \sqrt{7}\hat{K}$.

f. Determinar el módulo del vector $\vec{F} = 6\hat{I} + 5\hat{J}$.

g. Determinar el módulo del vector $\vec{G} = 8\hat{I} - 8\hat{K}$.

h. Determinar el módulo del vector $\vec{H} = -2\hat{J} - 7\hat{K}$.

i. Determinar el módulo del vector $\vec{I} = -\frac{4}{5}\hat{J} + \frac{2}{7}\hat{K}$.

j. Determinar el módulo del vector $\vec{K} = -\sqrt{\frac{3}{8}}\hat{I} + \sqrt{\frac{1}{2}}\hat{J}$.

3) Problemas de vector unitario de un vector

a. Hallar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A} = 3\hat{I} + 5\hat{J} + 8\hat{K}$.

b. Hallar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{B} = -2\hat{I} + 6\hat{J} - 8\hat{K}$.

c. Hallar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{C} = 4\hat{I} - 6\hat{J} - 5\hat{K}$.

d. Hallar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{D} = -\frac{1}{2}\hat{I} - \frac{3}{4}\hat{J} + \frac{5}{8}\hat{K}$.

e. Hallar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{E} = \sqrt{3}\hat{I} - 2\hat{J} - \sqrt{7}\hat{K}$.

f. Determinar el vector unitario en la dirección del vector mostrado en la Fig. 35.

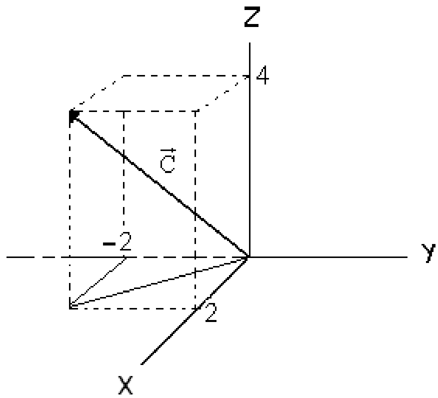


Figura 35. Vector $\vec{C}$ en el espacio. Fuente: elaboración propia

g. Determinar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$ mostrado en la Fig. 36.

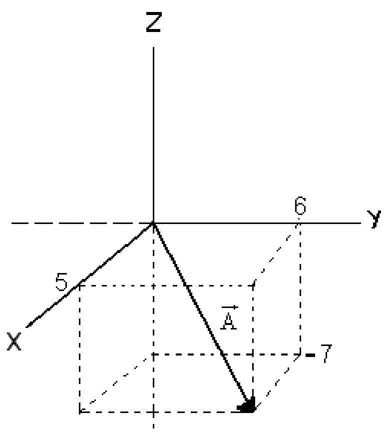


Figura 36. Vector $\vec{A}$ en el espacio. Fuente: elaboración propia

h. Determinar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$ mostrado en la Fig. 36.

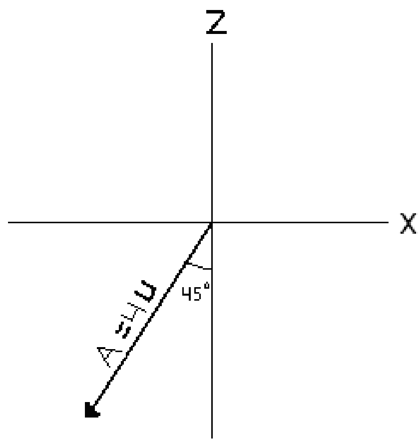


Figura 37. Vector $\vec{A}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

i. Determinar el vector unitario en la dirección del vector $\vec{C}$ mostrado en la Fig. 38.

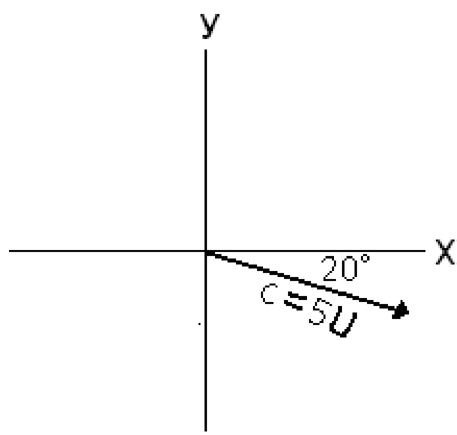


Figura 38. Vector $\vec{C}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

j. Determinar el vector unitario en la dirección del vector mostrado en la Fig. 39.

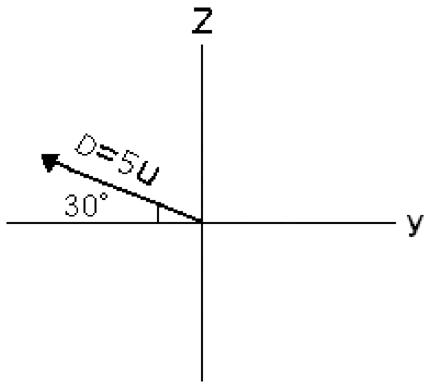


Figura 39. Vector $\vec{D}$ en el plano. Fuente: elaboración propia

4) Problemas de operaciones entre vectores

a. Determinar la suma de los vectores
$\vec{A} = 3\hat{I} + 5\hat{J} + 8\hat{k}$; $\vec{B} = -2\hat{I} + 6\hat{J} - 8\hat{k}$

b. Determinar la suma de los vectores
$\vec{C} = 4\hat{I} - 6\hat{J} - 5\hat{k}$; $\vec{D} = -\frac{1}{2}\hat{I} - \frac{3}{4}\hat{J} + \frac{5}{8}\hat{K}$

c. Determinar la suma de los vectores
$\vec{K} = -\frac{2}{5}\hat{I} + 3\hat{J}$; $\vec{D} = -\frac{7}{2}\hat{I} + \frac{3}{10}\hat{K}$

d. Determinar la suma de los vectores
$\vec{P} = -6\hat{J} + \frac{1}{2}\hat{K}$; $\vec{Q} = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{5}{4}\hat{K}$

e. Determinar la resta entre los vectores
$\vec{E} = 5\hat{I} - 6\hat{J} + 7\hat{k}$; $\vec{F} = \frac{5}{2}\hat{I} - \frac{7}{4}\hat{J} + \frac{5}{16}\hat{K}$

f. Determinar la resta entre los vectores
$\vec{G} = \frac{3}{6}\hat{I} - 6\hat{J} + \frac{4}{12}\hat{K}$; $\vec{H} = -\frac{5}{2}\hat{I} - \frac{7}{3}\hat{J} + \frac{8}{4}\hat{K}$

g. Determinar la resta entre los vectores:
$\vec{M} = 7\hat{I} - 5\hat{J} - 8\hat{k}$; $\vec{K} = -\frac{4}{3}\hat{I} + \frac{2}{6}\hat{J} - \frac{1}{8}\hat{K}$

h. Determinar la resta entre los vectores:
$\vec{N} = -9\hat{I} + 10\hat{K}$; $\vec{Z} = \frac{7}{4}\hat{J} - \frac{3}{4}\hat{K}$

i. Determinar el producto punto entre los vectores:
$\vec{I} = 3\hat{I} - 5\hat{J} + 7\hat{k}$; $\vec{J} = \frac{5}{2}\hat{I} - \frac{7}{4}\hat{J} + \frac{5}{16}\hat{K}$

j. Determinar el producto punto entre los vectores:
$\vec{K} = 6\hat{I} + 5\hat{J}$; $\vec{L} = -5\hat{I} + 4\hat{J}$

k. Determinar el producto punto entre los vectores:
$\vec{P} = -\frac{7}{9}\hat{I} + \frac{2}{5}\hat{J}$; $\vec{B} = \frac{7}{8}\hat{K} - 9\hat{J}$

l. Determinar el producto punto entre los vectores:
$\vec{R} = \sqrt{2}\hat{I} - \sqrt{3}\hat{J}$; $\vec{D} = -\sqrt{8}\hat{K} + \sqrt{12}\hat{J}$

m. Determinar el producto vectorial entre los vectores:
$\vec{A} = -3\hat{I} + 2\hat{J} - 4\hat{k}$; $\vec{B} = 2\hat{I} - 5\hat{J} + 7\hat{k}$

n. Determinar el producto vectorial entre los vectores:
$\vec{C} = -2\hat{I} - 8\hat{k}$; $\vec{D} = 6\hat{I} - 4\hat{J} + 5\hat{k}$

o. Determinar el producto vectorial entre los vectores:
$\vec{E} = -3\hat{I} - 2\hat{J}$; $\vec{F} = \frac{3}{2}\hat{I} - \frac{5}{4}\hat{J}$

p. Determinar el producto vectorial entre los vectores:
$\vec{G} = -\frac{9}{6}\hat{I} - \frac{5}{12}\hat{K}$; $\vec{H} = -\frac{3}{4}\hat{J} - \frac{7}{16}\hat{K}$

Referencias

[1] C. Gutiérrez, “Vectores”, en *Física General*, J. Rodríguez y L. A. Valdez, Eds. México: McGraw Hill, 2009, pp. 33-45.

[2] D. E. Roller y R. Blum, “Vectores”, en *Mecánica, ondas y termodinámica*, J. de la Rubia y J. Aguilar, Eds. Barcelona: Reverté, 1983, pp. 21-39.

[3] R. Serway, “Vectores”, en *Física,* G. Nagore, E. Cruz y J. Brenes, Eds. 4ª ed. México: McGraw Hill, 1997, pp. 53-61.

[4] S. Gartenhaus, “Cinemática bidimensional”, en *Física 1. Mecánica*, A. Contin, Ed., 1ª ed. México: N. E. Interamericana, 1979, pp. 45-54.

[5] M. Alonso y E. J. Finn, “Vectores”, en *Física volumen I: mecánica*, C. Hernandez, V. Latorre y J. Herkrath, Eds. Wilmington EE. UU.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986, pp. 32-53.

[6] L. Vargas, “La física como ciencia y como asignatura”, en *Física fundamental*, G. Solano y J. C. Serna, Eds. Barranquilla: Prisma Publicación, 1991, pp. 7-8.

[7] D. C. Giancoli, “Cinemática en dos o en tres dimensiones: vectores”, en *Física para ciencias e ingenierías*, R. Fuerte, Ed., 4ª ed. México: Pearson Educación, 2008, pp. 52-59.

[8] F. P. Beer, E. R. Johnston y E. R. Eisenberg, “Estática de particulas”, en *Mecánica vectorial para ingenieros: estática*, R. A. del Bosque y P. E. Roig, Eds. 8ª ed. México: McGraw Hill, 2007, pp. 17-27.

[9] P. A. Tipler, “Movimiento en dos y tres dimensiones,” en *Física*, J. Aguilar y J. de la Rubia, Eds. Barcelona: Reverté, 1977, pp. 56-61.

[10] F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman, “Unidades, cantidades físicas y vectores”, en *Física universitaria*, R. García y J. Lomas, Eds. Vol. I, 11ª ed., México: Pearson Educación, 2004, pp. 14-24.

[11] F. Bueche, “Descripción de las mediciones”, en *Fundamentos de física I*, G. Zetina, A. R. Ortiz y R. Barbosa, Eds., 3ª ed., México: McGraw Hill, 1984, pp. 10-20.

[12] P. A. Tipler y G. Mosca, “Movimiento en dos y tres dimensiones,” en *Mecánica, oscilaciones y ondas. Termodinámica*, A. Bramón y J. Casas, Eds. 5ª ed. Barcelona: Reverté, 2006, pp. 49-53.

[13] J. D. Wilson, A. J. Buffa y B. Lou, “Cinemática: descripción del movimiento”, en *Física*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds., 6ª ed., México: Pearson Educación, 2007, pp. 32-36.

[14] H. Pérez, “Vectores”, en *Física general*, 4ª ed., J. Callejas y A. Sámano, Eds. México: Grupo Editorial Patria, 2014, pp. 40-60.

[15] A. M. Sanchéz, “Conocimientos generales”, en *Física: guía para el estudiante*, J. E. Villa y E. Parada, Eds. México: Academia Institucional de Física, 2010, pp. 17-34.

[16] L. K. Branson, “Vectores”, en *Mecánica: para estudiantes de ingeniería*, L. Alava, L. C. Díaz y J. Montiel, Eds. Nueva York: Fondo Educativo Interamericano, 1973, pp. 1-23.

[17] J. L. Lorente y A. Rueda, “Fundamentos”, C. Suárez, Ed., en *Física. Tomo 1*, 4ª ed. Madrid: Aguilar, 1999, pp. 29-34.

[18] J. D. Cutnell y K. W. Johnson, “Introducción y conceptos matemáticos”, en *Física*, H. Villagomez, Ed., 2ª ed. México: Limusa Wiley, 2004, pp. 26-32.

[19] R. Resnick, D. Halliday y K. S. Krane, “Vectores”, en *Física*, J. Wiley, Ed., Vol. 1, 3ª ed. México: Compañia Editorial Continental, 1993, p. p 41-53.

[20] F. W. Sears y M. W Zemansky, "Composición y descomposición de vectores", en *Física*, 1ª ed., A. Yusta, Ed. Madrid: Aguilar, 1972, pp. 3-7.

[21] W. Hauser, "Vectores", en *Introducción a los principios de mecánica*, C. Ordoñez y S. Alonso, Eds. México: Addison-Wesley Hispanoamericana, 1969, pp. 2-4.

Unidad 3

Cinemática

Resumen

En esta unidad se tratan los tipos de movimiento que se presentan en la mecánica clásica, sin tener en cuenta las causas que los producen. Se aclara, además, la bien marcada diferencia que existe entre la cinemática y la dinámica, así como el marco en el que se representa el movimiento, es decir, el espacio y el tiempo. De igual manera, se explica lo que es un sistema de referencia, se toma la distancia como una invariante escalar, el tiempo se asume de carácter absoluto, se habla de la noción de partícula, se tratan los movimientos de traslación y rotación de un cuerpo, se analiza el movimiento general de un cuerpo y se conceptúa también sobre lo que es la posición, la trayectoria, la velocidad y la aceleración tanto media como instantánea. Por otra parte, se tratan movimientos como el rectilíneo uniforme y no uniforme, el movimiento circular uniforme y no uniforme y el movimiento parabólico, entre otros aspectos.

Palabras clave: aceleración, cinemática, desplazamiento, tiempo, trayectoria, velocidad.

A. Introducción

En el mundo en el que vivimos es común observar objetos, animales, personas, etc., en estado de reposo (velocidad cero) o en movimiento (velocidad diferente de cero). Estos hechos y el interés del ser humano en querer darle explicación a todo lo que ocurre a su alrededor llevó al hombre de ciencia, en especial a los interesados en el conocimiento de las ciencias físicas, a crear un campo del saber físico conocido como "cinemática". En esta unidad se estudian observables físicos tales como la velocidad, la aceleración y el desplazamiento, entre otros.

B. La cinemática

Según [1] y [2], la cinemática es la parte de la física mecánica encargada de estudiar y explicar las características físicas que presentan los cuerpos que se encuentran en estado de movimiento, sin tener en cuenta su naturaleza ni las causas que generan su desplazamiento, al tener cada uno de los movimientos del móvil lugar en el tiempo.

1) Conceptos fundamentales de la cinemática

Antes de entrar en detalle acerca de los temas tratados en esta unidad, se definirán algunos conceptos muy importantes que el estudiante de física debe tener claros, además de apropiarse de ellos, con el fin de no presentar inconvenientes en la aprehensión y profundización en el conocimiento de los fenómenos físicos enmarcados en esta área del saber.

Estos conceptos fundamentales a los que se refiere el párrafo anterior son: partícula, movimiento, sistema de referencia, posición de un cuerpo, trayectoria, desplazamiento, velocidad y aceleración, entre otros.

a) Concepto de partícula

De acuerdo con [1], cuando se habla de partícula en el mundo físico se hace referencia a un cuerpo considerado de masa relativamente pequeña a causa de las medidas locales que presente de sus dimensiones. De igual manera, en razón a la posición relativa que ocupe este con respecto a un sistema de referencia en particular, se le puede tildar de masa "puntual" [2]. Por ejemplo, un grano de arena en la tierra puede considerarse para el humano, como una partícula debido a las dimensiones que presenta. Una estrella en el espacio vista desde la Tierra se puede decir también que es una partícula. En sí, todo cuerpo en reposo o en movimiento relativo con respecto a un sistema de referencia en particular será tomado en este como una partícula debido a las dimensiones locales presentadas, o por su distancia relativa al origen del sistema de coordenadas.

Otros ejemplos, en particular de cuerpos que pueden considerarse partículas en algún momento debido a sus dimensiones, pueden ser una hormiga o un grano de azúcar, tal como se ilustra en la Fig. 40.

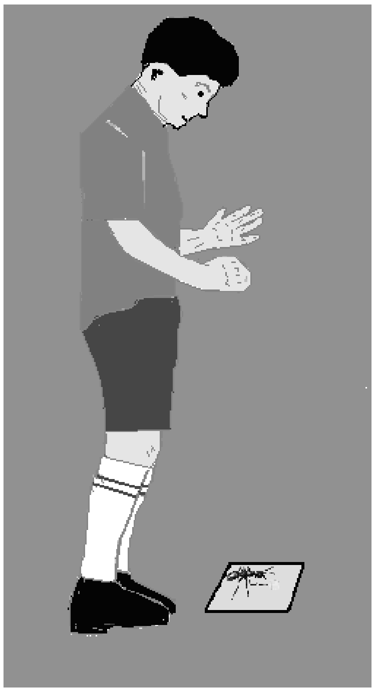


Figura 40. Hormiga y cubo de azúcar considerados como partículas debido a las dimensiones locales que presentan, comparados con las del observador. Fuente: elaboración propia

b) Concepto de movimiento

La palabra *movimiento*, en física, de acuerdo con [3], se refiere al cambio continuo y relativo de posición que sufre un cuerpo con respecto a otro a medida que el tiempo transcurre. Es decir, si la posición de un segundo cuerpo con respecto a un primero visto desde un sistema de referencia en particular no varía al pasar el tiempo, se concluye que este se encuentra en reposo respecto al primer cuerpo. Para describir de forma objetiva si un cuerpo esta en movimiento o no, es necesario seleccionar un sistema de referencia o sistema de coordenadas, el cual es una estructura puramente matemática sin realidad física propia, desde la cuál se puede describir su posición [4]. Esto último le indicará a la persona que realiza la observación si el cuerpo se encuentra en movimiento relativo o no respecto a él [5]. Recuerde que tanto el movimiento como el reposo son estados físicos de los cuerpos cuya descripción depende del sistema de referencia desde el que se realiza el estudio. En la Fig. 41 se muestra cómo un auto en particular, visto desde la calle por un observador en tierra, tiene un movimiento relativo con respecto a él y al farol de luz presente en la escena, pero cómo este mismo auto no presenta movimiento con respecto a un segundo observador que se encuentra en su interior.

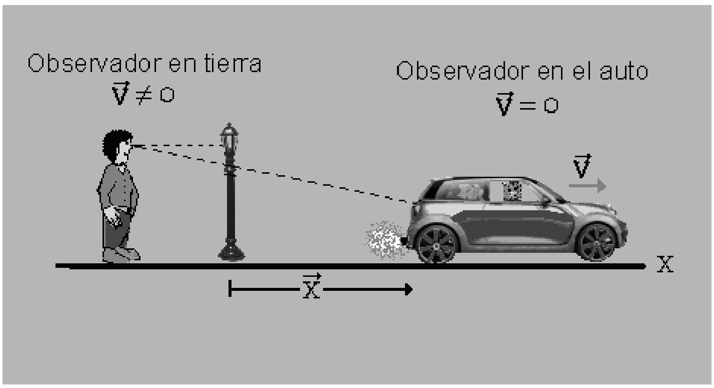


Figura 41. Auto moviéndose con respecto a un faro de luz de acuerdo con el observador en tierra. Para el observador en el interior del auto este no se está moviendo respecto a él. Fuente: elaboración propia

c) Concepto de trayectoria

Un cuerpo que se mueva al azar en el espacio puede tomar diversos caminos para ir de un punto A, llamado “de salida”, a otro punto E, llamado “de llegada”. De acuerdo con [1], en física mecánica se conoce como “trayectoria” a la línea descrita por el cuerpo durante su movimiento. Se puede decir también que ésta es el conjunto de puntos sucesivos e imaginarios por los cuales pasa el cuerpo para ir del punto de salida al punto de llegada.

En la Fig. 42 se muestran varios de los puntos imaginarios que hacen parte del conjunto de puntos que integran la trayectoria (línea roja) seguida por una mariposa para ir del punto A de salida al punto E de llegada.

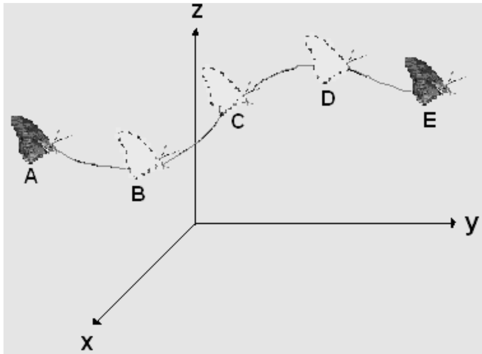


Figura 42. Trayectoria seguida por una mariposa para ir del punto A al punto E. Fuente: elaboración propia

Cabe aclarar que la trayectoria seguida por un cuerpo en movimiento, y descrita por cierto observador ubicado en un sistema de referencia en particular, no debe considerarse de carácter absoluta, es decir, la descripción que haga el observador de esta siempre dependerá del sistema de referencia desde el cual se realiza la observación. Un ejemplo sencillo que permite entender esto se presenta cuando se deja caer un objeto desde un avión que se mueve en el espacio vacío, con velocidad constante y en línea recta respecto al eje *x*. Ahora, si consideramos dos observadores, uno ubicado en el avión y otro situado en tierra (sistemas inerciales de observación diferente), los cuales tienen la misión de observar y describir la trayectoria que sigue el objeto desde el momento de su caída hasta su llegada a tierra, tendremos que la persona situada en el avión dirá de su observación que la trayectoria seguida por el objeto durante su caída es una línea vertical recta, tal como se observa en la Fig. 43.

Figura 43. Trayectoria rectilínea seguida por el proyectil y descrita por el observador ubicado en el bombardero. Fuente: elaboración propia

Por su parte, la segunda persona, quien se encuentra ubicada en tierra, concluirá que la trayectoria descrita por el proyectil no es una línea vertical recta, si no que es semiparabólica, y que la primera persona está equivocada, tal como se ilustra en la Fig. 44.

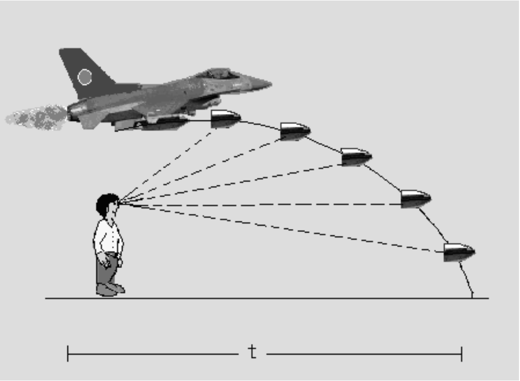


Figura 44. Trayectoria rectilínea seguida por el proyectil descrita por un observador en tierra Fuente: elaboración propia.

Seguramente, estos puntos de vista muy diferentes generarán una discusión entre los dos observadores, a pesar de que ambos tienen la razón.

La trayectoria del cuerpo, como se mencionó, es una línea imaginaria, la cual puede ser representada por una línea recta, por una curva como la parábola, e incluso por una mucho más compleja que éstas. Se aclara que el movimiento en línea recta de un cuerpo se presenta cuando su dirección, medida desde un sistema de referencia inercial en particular, no varía a medida que transcurre el tiempo. Además, de acuerdo con [6], cuando hablamos de un sistema de referencia inercial se trata de aquel sistema cuya velocidad relativa se considera constante o nula (velocidad cero), es decir, este siempre está ligado a cuerpos libres.

d) Concepto de sistema de referencia

Según [6], el conjunto de cuerpos que convencionalmente se encuentran en reposo se toma como puntos referenciales para examinar el movimiento de otros cuerpos. Es a estos puntos referenciales a los que se les denominan "sistemas de referencia". Ellos son arbitrarios y se escogen de manera conveniente, con el fin de realizar mediciones de observables físicos respecto a él, tales como, por ejemplo, describir la velocidad, la aceleración o la posición de otros cuerpos. Dependiendo del sistema de referencia elegido se puede facilitar o complicar la toma de medida o la descripción del observable requerido. De esta manera, en la Fig. 45 se muestran algunos estudiantes definiendo el sistema de referencia inercial desde el cual piensan medir el tiempo que tarda un móvil en ir de un punto a otro. (Recuerde que un sistema de referencia inercial es aquel punto referencial que se encuentra en reposo o se mueve a velocidad constante).

Figura 45. Elección de un sistema o punto de referencia con el fin de realizar mediciones físicas. Fuente: elaboración propia

e) Concepto de posición de un cuerpo

La posición de un cuerpo cualquiera está determinada por la distancia y la orientación que tenga este con respecto a un punto, denominado "punto de referencia" (sistema de referencia) [7]. Se entiende por *orientación* la dirección del vector que le define su posición en el espacio, en el plano o sobre una línea recta en la que se encuentre el cuerpo en observación, definido como vector de posición. Esto nos muestra la importancia que tiene el definir un sistema de coordenadas cuyo origen se encuentre en el punto de referencia acordado, y que desde él se pueda ubicar el objeto en estudio en cualquier instante de tiempo, bien sea que este último se encuentre en reposo o bien en movimiento relativo con respecto al origen de coordenadas. En la Fig. 46 se destaca en color blanco el vector de posición de un móvil respecto al punto de referencia establecido para definir su ubicación (punto negro en la figura).

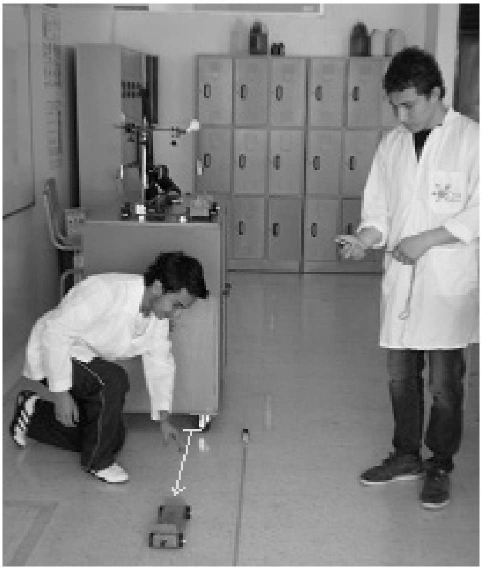


Figura 46. Vector de posición de un móvil con respecto al sistema de referencia establecido. Fuente: elaboración propia

f) Concepto de vector de posición

A un vector que puede determinar en cualquier instante de tiempo dónde se encuentra ubicado cierto objeto en particular se le denomina "vector de posición del objeto" o "radio vector". Por ejemplo, según [8], para determinar la posición de un cuerpo que se encuentre en el espacio es necesario definirle tres longitudes, medidas desde cierto punto de referencia u origen, en tres direcciones dadas; es decir, todo vector de posición consta de unas distancias y de unas direcciones. Según [9], las distancias siempre se medirán desde el origen del sistema de coordenada hasta el punto en el que se encuentra el cuerpo en el instante observado. Las direcciones del vector se determinan a través de sus ángulos directores, tema tratado en la anterior unidad. El vector de posición de un objeto puede ser constante o variable a medida que transcurre el tiempo. Esto depende de si el objeto se encuentra en reposo o en movimiento relativo con respecto al sistema de referencia, ya sea que este se ubique en el espacio, en un plano o sobre una línea recta. Lo anterior es referido al sistema coordenado cartesiano. Si el vector de posición es variable, esto implicaría que podría estar cambiando, a medida que pasa el tiempo, la distancia que tiene con respecto al origen, su dirección o ambos observables físicos a la vez.

Desde el punto de vista matemático y de acuerdo con [9], el vector de posición de un cuerpo en el sistema de coordenadas cartesianas se puede representar a través de las siguientes ecuaciones:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z \tag{28}$$

ó

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \tag{29}$$

Así, entonces, (28) y (29) se consideran equivalentes.

En la Fig. 47 se muestra el vector espacial de posición de un ave con respecto al origen del sistema de coordenada espacial cartesiano.

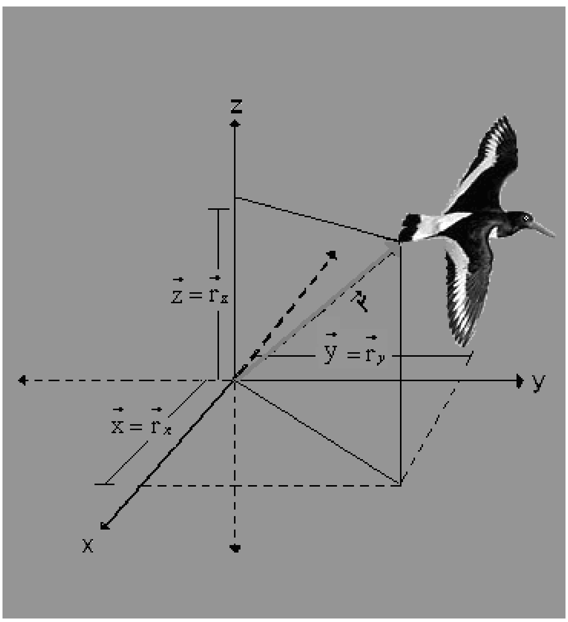


Figura 47. Vector de posición con respecto al origen del sistema de coordenadas de un ave volando en el espacio. Fuente: elaboración propia

Ejemplo 1.

Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado del avión que se muestra en la Fig. 48.

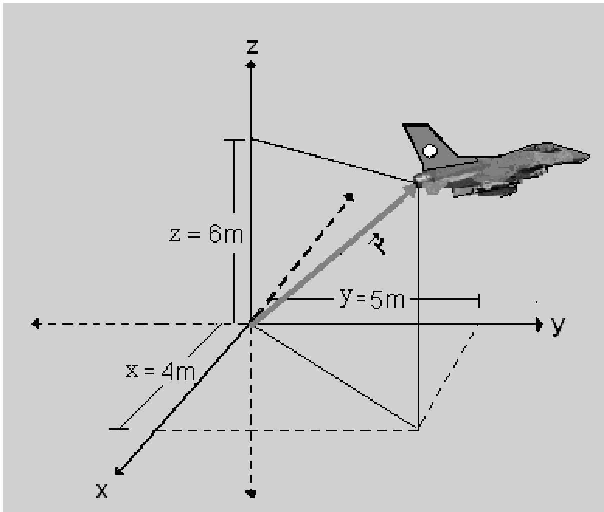


Figura 48. Coordenadas cartesianas del vector de posición de un avión que se encuentra volando en el espacio con respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas.
Fuente: elaboración propia

Solución

Como se observa en la Fig. 48, el avión con respecto al origen del sistema de coordenadas en la dirección del eje *x* se encuentra a una distancia de 4 m con respecto al eje x, y a 5 m con respecto a *y*, y con respecto al eje *z* a 6 m. Según (28), cada uno de los valores anteriores queda representado de la siguiente manera:

$$r_x=4m \; ; \; r_y=5m \; ; \; r_z=6m$$

Además de las orientaciones (vectores unitarios) del vector de posición en cada uno de los ejes coordenados, se presentan en sus direcciones positivas, por tanto, el vector de posición general del ave en el espacio queda definido de la siguiente manera:

$$\vec{r} = \left(4\hat{I} + 5\hat{J} + 6\hat{K}\right) m$$

Ejemplo 2.

Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado de la persona que se mueve sobre el plano inclinado que se presenta en la Fig. 49.

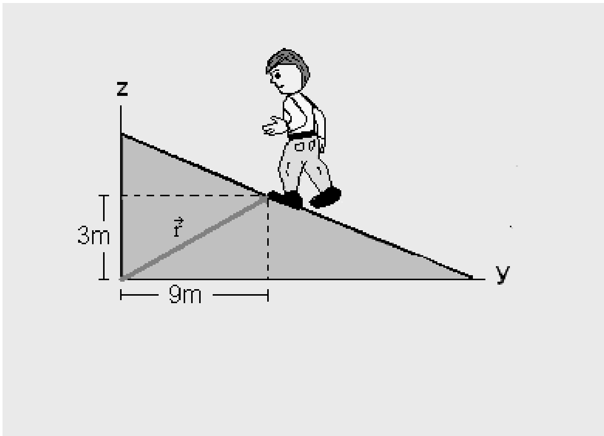


Figura 49. Coordenadas cartesianas del vector de posición de una persona que se mueve sobre un plano inclinado. Fuente: elaboración propia

Solución

Como se muestra en la Fig. 49, la persona se mueve sobre el plano (*yz*). Con respecto al origen del sistema de coordenadas en la dirección del eje *y*, se encuentra a una distancia de 9 m, y con relación al eje *z* a una distancia de 3 m. Todas estas medidas de longitud son relativas al punto origen indicado en la imagen de la Fig 49. De todo lo anterior se puede concluir lo siguiente:

$$r_x=0\ ;\ r_y=9m\ ;\ r_z=3m$$

Asimismo, para este ejemplo las orientaciones presentadas por las componentes del vector de posición de la persona, con respecto a cada uno de los ejes coordenados que forman el plano en el cual se mueve ésta, se presentan en sus direcciones positivas. Por tanto, según (28) su posición queda definida por la siguiente expresión:

$$\vec{r} = \left(9\hat{J} + 3\hat{K}\right)\text{m}$$

Ejemplo 3.

Determine de la Fig. 50 el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado del atleta que se mueve sobre el eje *x* negativo.

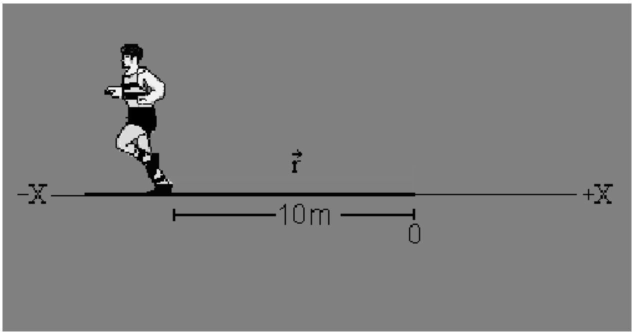


Figura 50. Coordenadas cartesianas del vector de posición de una persona que se mueve sobre el eje *x* negativo. Fuente: elaboración propia

Solución

Como se muestra en la Fig. 50, el atleta se mueve sobre el eje *x* en su sentido negativo. Se puede observar, además, que el atleta se encuentra a una distancia de 10 m con respecto al origen del sistema de coordenadas, lo cual nos lleva a concluir lo siguiente:

$$r_x = 10m \ ; \ r_y = 0 \ ; \ r_z = 0$$

Por tanto, al tener presente (28), el vector de posición del atleta en el punto indicado queda expresado de la siguiente manera:

$$\vec{r} = 10\text{m}\left(-\hat{\imath}\right) = -10\text{m}\hat{\imath}$$

g) Concepto de desplazamiento

De acuerdo con [10], la palabra *desplazamiento* nos indica cambio de posición a medida que pasa el tiempo, lo cual ocurre cuando un cuerpo se traslada de un punto a otro. En física, y especialmente en esta unidad de cinemática, el término *desplazamiento* toma gran importancia, sobre todo, cuando se analizan personas, partículas, animales y objetos, en general, que se encuentren en movimiento. Cuando un cuerpo se mueve, éste se encuentra en movimiento relativo con respecto al origen de coordenadas de un sistema de referencia en particular en el que se ubica el observador. Esto último implica que, a medida que transcurre el tiempo, el vector de posición del cuerpo varía con respecto al origen del sistema de referencia desde el cual es observado, tal como se muestra en la Fig. 51.

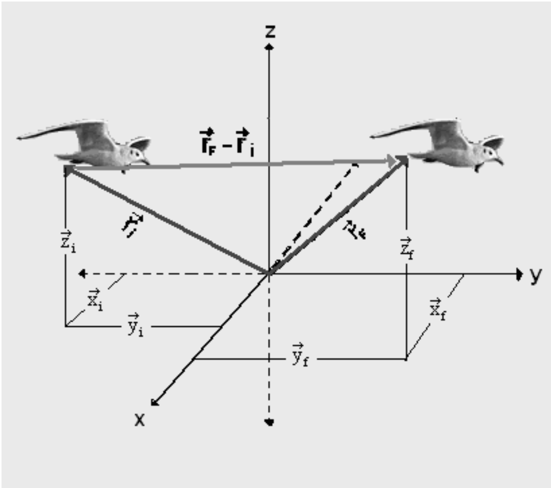


Figura 51. Variación del vector de posición r_f-r_i de un ave, debido a su movimiento relativo a medida que pasa el tiempo con respecto al sistema de coordenadas. Esta variación en su posición es lo que determina su desplazamiento. Fuente: elaboración propia

Ahora, de acuerdo con [9] y [11], la variación del vector de posición es lo que se conoce como "vector de desplazamiento del cuerpo en movimiento", y matemáticamente para desplazamiento en dos o tres dimensiones se define de la siguiente manera:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \tag{30}$$

Donde:

- $\Delta\vec{r}$: representa el vector de desplazamiento del cuerpo, medido desde el SC.
- $\vec{r}_i$: representa el vector de posición inicial del cuerpo, medido desde el SC.
- $\vec{r}_f$: representa el vector de posición final del cuerpo, medido desde el SC.

Nota: SC significa aquí "sistema de coordenadas".

Si tenemos en cuenta la definición de vector de posición y el concepto de resta entre vectores, temas tratados en la segunda unidad del texto, el vector de desplazamiento espacial de un cuerpo que se mueve en el espacio se escribe de la siguiente forma:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \left(x_f\hat{I} + y_f\hat{J} + z_f\hat{K}\right) - \left(x_i\hat{I} + y_i\hat{J} + z_i\hat{K}\right)$$

Es decir:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \left(x_f\hat{I} + y_f\hat{J} + z_f\hat{K}\right) + \left(-x_i\hat{I} - y_i\hat{J} - z_i\hat{K}\right)$$

Al agrupar términos semejantes y sacar factor común en la expresión anterior se obtiene:

$$\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\hat{I} + (y_f - y_i)\hat{J} + (z_f - z_i)\hat{K} \qquad (31)$$

Así, (31) representa el vector de desplazamiento de cualquier cuerpo que se mueve en el espacio. En esta ecuación se puede ver cómo este observable físico depende de los vectores que determinan su posición inicial y final, tal como lo muestra la expresión matemática vectorial que lo define. Por tanto, se concluye que el desplazamiento es un vector y, por consiguiente, debe tener magnitud y dirección. Su magnitud es una distancia o longitud, la cual se mide desde el punto origen de su cola hasta el punto que define la punta de su cabeza.

Al tener presente lo tratado en la unidad anterior de vectores, así como lo expresado en [17] en lo concerniente al desplazamiento de un cuerpo, la expresión matemática que permite determinar la magnitud del vector de desplazamiento en el sistema espacial de coordenadas cartesianas esta dada por:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta r = d = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2} \qquad (32)$$

Donde *d* representa la magnitud del vector de desplazamiento o la distancia recorrida por el cuerpo en movimiento entre sus dos puntos extremos, inicial y final.

Ejemplo 4.

a) Determine el vector de desplazamiento $\Delta\vec{r}$ de un ave que parte del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f; b) encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por el ave para ir del primer punto al segundo de acuerdo a lo que se observa en la Fig. 52.

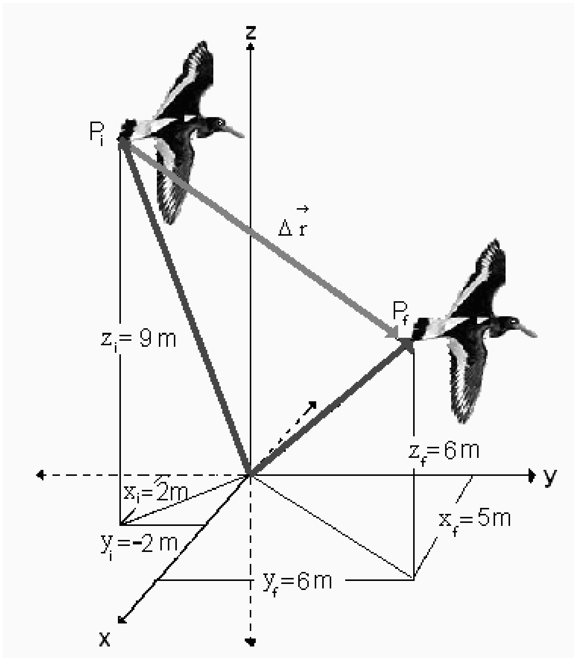


Figura 52. Desplazamiento en línea recta de un ave debido a la variación de su vector de posición con respecto al origen del sistema de coordenadas. Fuente: elaboración propia

Solución

a) De acuerdo con lo observado en la Fig. 52 y al tener en cuenta (29), los vectores de posición inicial y final del ave en cada uno de sus puntos de ubicación quedan expresados de la siguiente manera:

$$\vec{r}_i=\left(2\hat{I}-2\hat{J}\ +\ 9\hat{K}\right)m\ ;\ \vec{r}_f=\left(5\hat{I}\ +\ 6\hat{J}\ +\ 6\hat{K}\right)m$$

De estos vectores de posición inicial y final se deducen cada uno de los coeficientes escalares que hacen parte de sus respectivas componentes vectoriales, así:

$$x_i=\ 2m\ ;\ y_i=-2m\ ;\ z_i=9m\ ;\ x_f=5m\ ;y_f\ =6m\ ;\ z_f\ =6m$$

Si se tiene en cuenta (31), la cual permite determinar el vector de desplazamiento del cuerpo en movimiento, tenemos que:

$$\Delta\vec{r}\ =\ (x_f-x_i)\hat{I}+(y_f-y_i)\hat{J}+(z_f-z_i)\hat{K}$$

Al reemplazar los valores hallados en la parte de arriba en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\Delta\vec{r} = [5-(2)]m\hat{I} + [6-(-2)]m\hat{J} + [6-(9)]m\hat{K}$$

Al destruir los paréntesis dentro del corchete por medio de la ley de los signos se tiene:

$$\Delta\vec{r} = [5-2]m\hat{I} + [6+2]m\hat{J} + [6-9]m\hat{K}$$

Si se realizan las operaciones de suma y resta indicadas en cada uno de los corchetes presentes en la ecuación anterior, y se aplica la ley de los signos para desaparecerlos, se llega a lo siguiente:

$$\Delta\vec{r} = 3m\hat{I} + 8m\hat{J} - 3m\hat{K}$$

El vector anterior es el vector de desplazamiento pedido del ave.

b) Para determinar la distancia recorrida en línea recta por el ave para ir del punto inicial *Pi* al punto final *Pf* se hace uso de (32), es decir:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta r = d = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2}$$

Del vector de desplazamiento hallado en la parte de arriba se deduce:

$$x_f - x_i = 3m \;;\; y_f - y_i = 8m \;;\; z_f - z_i = -3m$$

Al reemplazar los valores anteriores en la expresión matemática que permite hallar la longitud del vector de desplazamiento, tenemos:

$$d = \sqrt{(3m)^2 + (8m)^2 + (-3m)^2} = \sqrt{9m^2 + 64m^2 + 9m^2}$$

Si se suman términos semejantes y se saca raíz cuadrada a la unidad de medida, tenemos que:

$$d = \sqrt{82}\,m$$

Se trató en los párrafos anteriores cómo está definido el vector de desplazamiento de un cuerpo que se mueve en el espacio y cómo los cuerpos pueden moverse en planos, así como en líneas rectas. Ahora bien, cuando un cuerpo se mueve en un plano, una de las tres componentes vectoriales que integran su vector de desplazamiento espacial desaparece, de tal manera que la ausencia de la componente vectorial que no hace parte del vector de desplazamiento del cuerpo depende del plano en el que este se mueva. Por ejemplo, en la Fig. 53 se muestra un papagayo moviéndose en el plano (*xy*); en este caso no aparecería en su vector de desplazamiento espacial la componente vectorial correspondiente a la dirección del eje *z*, es decir, el vector unitario $\hat{k}$.

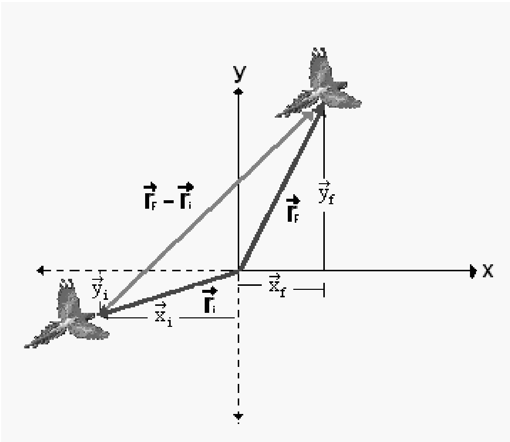


Figura 53. Papagayo moviéndose en el plano *xy* del sistema espacial cartesiano, en el que se muestra cada una de las componentes vectoriales de sus vectores de posición inicial y final en sus puntos correspondientes. Fuente: elaboración propia

A continuación, se muestra cómo están expresados matemáticamente los vectores de desplazamiento de un cuerpo en movimiento para los diferentes planos del sistema de coordenadas cartesianas en los que este se puede mover.

$$\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\hat{I} + (y_f - y_i)\hat{J} \tag{33}$$

Así, (33) permite determinar el vector de desplazamiento de un cuerpo que se mueve en el plano *xy*, donde la componente del eje *z* se hace cero.

$$\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\hat{I} + (z_f - z_i)\hat{K} \tag{34}$$

Por su parte, (34) expresa el vector de desplazamiento de un cuerpo que se mueve en el plano *xz*, donde la componente del eje *y* se hace cero.

$$\Delta\vec{r} = (y_f - y_i)\hat{J} + (z_f - z_i)\hat{K} \tag{35}$$

De esta manera, (35) expresa el vector de desplazamiento de un cuerpo que se mueve en el plano *yz*, donde la componente del eje *x* se hace cero.

Ejemplo 5.

Encuentre el vector de desplazamiento $\Delta\vec{r}$ de la persona que se mueve en un plano inclinado, el cual parte del punto 1 para llegar al punto 2, tal como se muestra en la Fig. 54.

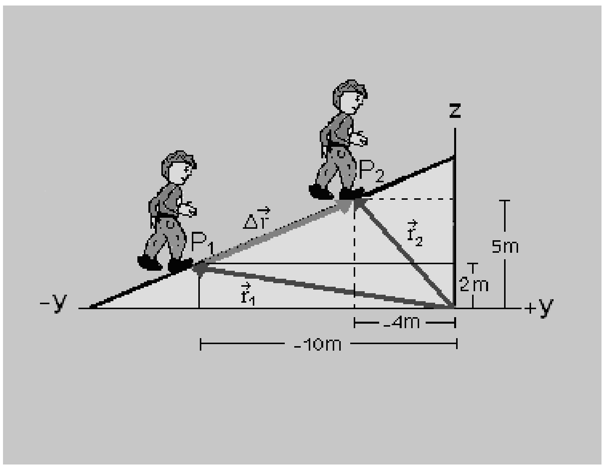


Figura 54. Persona moviéndose en el plano *yz* del sistema espacial cartesiano, donde se muestra cada uno de los valores de las componentes vectoriales de sus vectores de posición inicial y final en sus puntos correspondientes. Fuente: elaboración propia

Solución

De la Fig. 54 se puede deducir que los vectores de posición con respecto al origen del sistema de coordenadas en el punto 1 y en el punto 2 están definidos de la siguiente manera:

$$\vec{r}_1 = 10m\left(-\hat{J}\right)+2mK \text{ y } \vec{r}_2=4m\left(-\hat{J}\right)+5m\hat{K}$$

De los vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, definidos anteriormente, se deduce:

$$y_i = -10m \; ; \; z_i = 2m \; ; \; y_f = -4m \; ; \; z_f = 5m$$

Al hacer uso de (35), $\Delta\vec{r} = (y_f - y_i)\hat{J} + (z_f - z_i)\hat{K}$, donde reemplazamos los valores de arriba en ella, tenemos:

$$\Delta\vec{r} = \left[-4m - (-10m)\right]\hat{J} + \left[5m - 2m\right]\hat{K}$$

Al destruir el paréntesis en el primer corchete por medio de la ley de los signos se obtiene:

$$\Delta\vec{r} = \left[-4m + 10m\ \right]\hat{J} + \left[5m - 2m\right]\hat{K}$$

Si se realizan las operaciones indicadas en los corchetes de la expresión anterior se obtiene, finalmente, el vector de desplazamiento pedido:

$$\Delta\vec{r} = 6m\hat{J} + 3m\hat{K}$$

Ahora, cuando un cuerpo se mueve sobre una línea recta, dos de las componentes vectoriales que hacen parte de su vector de desplazamiento espacial —si se moviera en tres dimensiones— no aparecerán en la expresión matemática que lo define. Así como en el caso de los planos, esto dependerá de la dimensión lineal en la que este se mueva. En la Fig. 55 se muestra el vector de desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$ de un perro que se mueve en una dimensión, en este caso sobre el eje *x* positivo, tal como se observa en la gráfica de la Fig. 55; en ella no aparecen las componentes vectoriales espaciales pertenecientes al eje *y*, y al eje *z* del sistema espacial cartesiano.

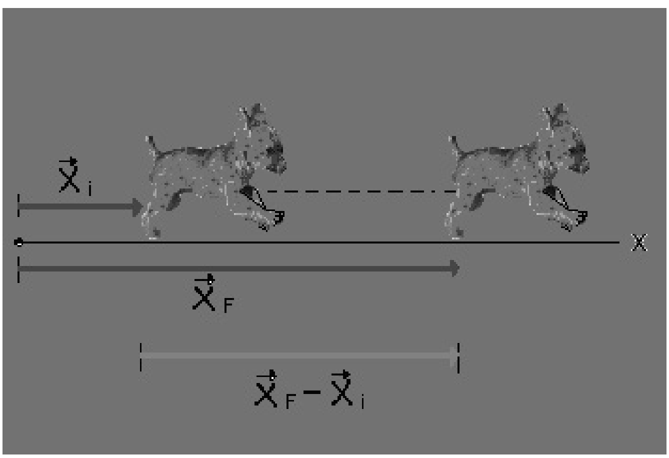


Figura 55. Perro desplazándose sobre el eje *x* del sistema de coordenadas cartesianas. Fuente: elaboración propia

De lo expresado en [12], [13] y [14] se puede deducir que las fórmulas matemáticas que determinan el vector de desplazamiento de un cuerpo que se traslada unicamente sobre uno solo de los ejes del sistema de coordenadas espacial cartesiano son:

$$\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\hat{I} \tag{36}$$

Así, (36) expresa el vector de desplazamiento de un cuerpo que se mueve sobre el eje *x*.

$$\Delta\vec{r} = (y_f - y_i)\hat{J} \tag{37}$$

Por su parte, (37) expresa el vector de desplazamiento de un cuerpo que se mueve sobre el eje *y*.

$$\Delta\vec{r} = (z_f - z_i)\hat{K} \tag{38}$$

Ahora bien, (38) expresa el vector de desplazamiento de un cuerpo que se mueve sobre el eje *z*.

Los vectores de desplazamientos expresados por medio de (36), (37) y (38) se pueden denotar también de la siguiente forma:

$$\Delta\vec{x} = (x_f - x_i)\hat{I} \tag{39}$$

$$\Delta\vec{y} = (y_f - y_i)\hat{J} \tag{40}$$

$$\Delta\vec{z} = (z_f - z_i)\hat{K} \tag{41}$$

Ejemplo 6.

Determine el vector de desplazamiento del camión que se mueve desde el punto A al punto B sobre el eje *x* positivo (véase la Fig. 56).

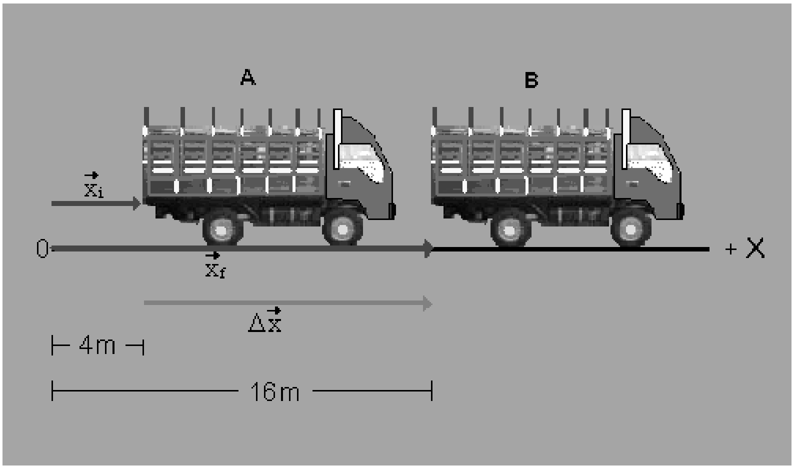


Figura 56. Desplazamiento de un camión sobre el eje *x* positivo del sistema de coordenadas cartesianas. Fuente: elaboración propia

Solución

En la Fig. 56 se puede observar que los vectores de desplazamientos inicial y final del camión estan definidos de la siguiente manera:

$$\vec{x}_i = 4m\hat{I} \text{ y } \vec{x}_f = 16m\hat{I}$$

De los vectores de posición inicial y final del camión se deduce que:

$$x_i = 4m \text{ y } x_f = 16m$$

Al hacer uso de (39), es decir, $\Delta\vec{x} = (x_f - x_i)\hat{I}$., y reemplazar los valores de arriba en (39), tenemos:

$$\Delta\vec{x} = (16-4)m\hat{I}$$

Si se realiza la resta indicada en el paréntesis que aparece en la expresión anterior, obtenemos finalmente el vector de desplazamiento del camión:

$$\Delta\vec{x} = 12m\hat{I}$$

h) Concepto de distancia recorrida

Se debe tener cuidado al tratar los conceptos de desplazamiento y distancia porque, por lo general, las personas son dadas a confundir el uno con el otro. En [1] se expresa que la distancia es una longitud, la cual la define el camino recorrido por el cuerpo en movimiento y, como se explicó en la segundad unidad, pertenece a las magnitudes escalares, mientras que el desplazamiento pertenece a las magnitudes vectoriales, es decir, son conceptos totalmente diferentes. Ahora, una cosa importante de aclarar se presenta cuando un cuerpo en movimiento describe una trayectoria como la que se muestra en la Fig. 57, y se pregunta por su distancia total recorrida (longitud recorrida desde el punto inicio al punto final), desde el punto A hasta el punto B. Resulta que esta última no es la magnitud de su vector de desplazamiento, y menos la longitud del vector que le define su posición inicial o final; en cambio, su distancia total recorrida quedará plenamente determinada cuando se halle la longitud total de la trayectoria seguida por el cuerpo para ir del punto inicio al punto final, descrita por el observador ubicado en el origen del sistema de coordenadas elegido.

La Fig. 57 muestra una mariposa que se desplaza de un punto A a otro punto B y sigue la trayectoria que se muestra en ella. El valor de la distancia total medida de su trayectoria es diferente a la magnitud o la distancia de su vector de desplazamiento (flecha roja) para este caso en particular.

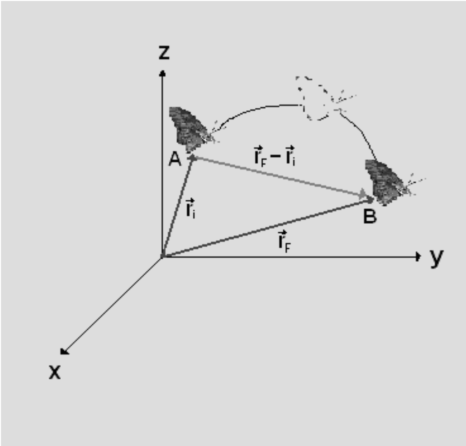


Figura 57. Mariposa trasladándose de un punto A a un punto B. La distancia recorrida por ella entre estos dos puntos queda definida por la longitud de su trayectoria y no por la magnitud de su vector de desplazamiento. Fuente: elaboración propia

Nota importante: solo para el caso en particular para el cual la trayectoria descrita por un cuerpo que parte de un punto inicial A y llega a un punto final B es una línea recta, su distancia total recorrida correspondiente será igual a la magnitud o longitud de su vector de desplazamiento, para otro caso no.

Con el fin de simplificar un poco más el entendimiento de lo expresado en los párrafos anteriores en todo lo concerniente al tema, solo se tratarán aquí ejemplos de cuerpos cuyas trayectorias descritas sean líneas rectas. Más adelante se profundizará en mayor detalle en esto.

Ejemplo 7.

Determine la distancia recorrida por el atleta que parte del punto A y llega hasta el punto B (véase la Fig. 58).

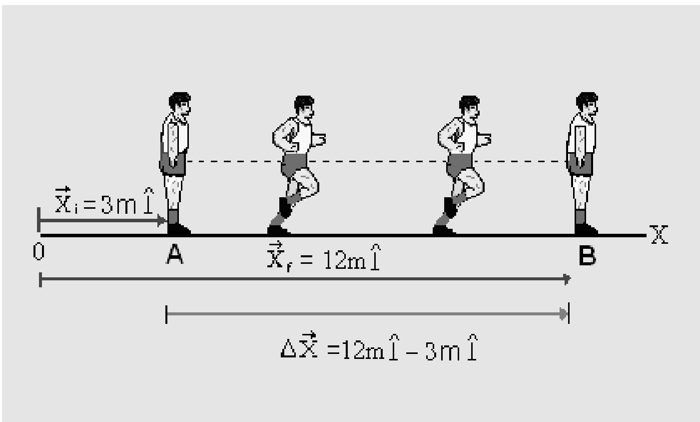


Figura 58. Atleta en movimiento sobre el *x* positivo; parte del punto A para llegar al punto B. Fuente: elaboración propia

Solución

De la Fig. 58 se puede deducir que los vectores de posición inicial y final del atleta estan dados de la siguiente manera:

$$\vec{x}_i = 3m\hat{\imath} \text{ y } x_f = 12m\hat{\imath}$$

De los vectores de posición inicial y final del atleta se deduce:

$$x_i = 3m \text{ y } x_f = 12m$$

Al reemplazar los valores anteriores en (39) tenemos:

$$\Delta\vec{x} = (12m - 3m)\hat{\imath}$$

Dado $\Delta x = d = x_f - x_i$, donde esta expresión representa la magnitud del vector de desplazamiento, y al mismo tiempo la distancia recorrida por el atleta entre los puntoas A y B, se obtiene:

$$d = 12m - 3m = 9m$$

Se puede concluir del resultado anterior que el atleta recorre una distancia de 9 m en línea recta para ir del punto A al B.

i) Concepto de velocidad y rapidez

Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento se hace indispensable, además de describir en cualquier instante de tiempo su posición, su desplazamiento, su trayectoria y la distancia total recorrida, analizar otros observables físicos como lo son la velocidad y la rapidez. De acuerdo con lo expuesto en [15], estos últimos están íntimamente relacionados, deduciéndose además que la rapidez es la magnitud del vector llamado "velocidad" [14]. Lo expresado en estas últimas líneas nos indica que la rapidez es de naturaleza escalar y no vectorial como lo es la velocidad. Por lo regular, estos dos conceptos son muy dados a confundirse el uno con el otro, ya que para la mayoría de las personas representan el mismo fenómeno físico, es decir, se cree que hablar de rapidez es lo mismo que hablar de velocidad. Antes de entrar a definir los conceptos de velocidad y rapidez, se analiza el siguiente ejemplo que permite aclarar mejor la diferencia entre ellos.

Si le preguntaran a un grupo de personas si los dos autos que aparecen en la Fig. 59 tienen igual velocidad, seguramente la mayoría de ellos, por no decir que todos, dirían que sí. La conclusión anterior a la que se llega se presenta porque no tienen claro o desconocen que la velocidad es un vector y, por tanto, debe estar compuesta de una magnitud y de una dirección. Ahora, lo que se puede decir por simple inspección en la gráfica de la Fig. 59 es que los dos móviles tienen igual rapidez, pero, debido al sentido contrario que muestran en sus movimientos, se deduce, además, que sus direcciones difieren y, por ende, sus velocidades.

A continuación, se representan las expresiones matemáticas de las velocidades de los dos autos, lo cual nos ilustra en mayor detalle por qué estas no son iguales.

La velocidad del auto 1 esta dada por: $\vec{v}_1 = v_1\,(-\hat{I}) = 50\,\frac{km}{h}\,(-\hat{I})$.

La velocidad del auto 2 esta dada por: $\vec{v}_2 = v_2\,(\hat{I}) = 50\,\frac{km}{h}\,(\hat{I})$.

Como se puede notar en las expresiones físico matemáticas anteriores, las velocidades de los dos autos presentan la misma magnitud de velocidad, es decir, tienen igual la rapidez, pero sus vectores unitarios (los cuales les definen su dirección) son diferentes; por tanto, sus velocidades no son iguales.

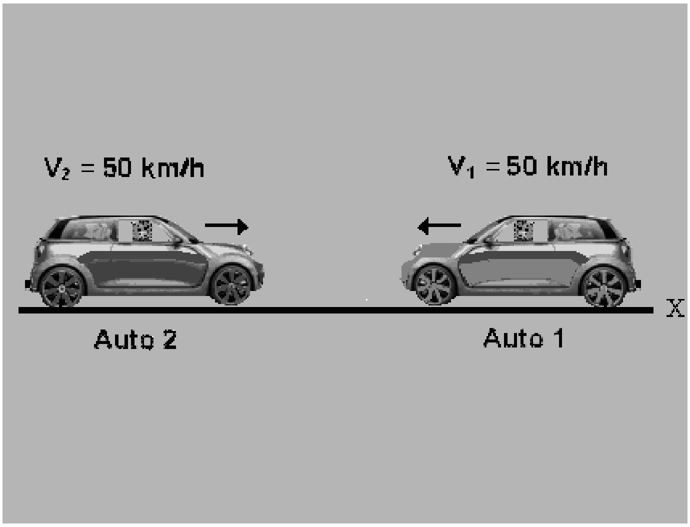


Figura 59. Dos autos que presentan igual rapidez, pero velocidades diferentes, esto último por llevar sentido contrario, lo cual implica que sus direcciones no sean iguales.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [15], la velocidad, además de mostrar que tan rápido se mueve un cuerpo, permite también determinar la dirección en la que se mueve con respecto a un sistema de referencia seleccionado. Es por esto que, desde el punto de vista físico y en términos generales, la velocidad de un cuerpo se define como la razón (fracción) entre el vector de desplazamiento del cuerpo y el tiempo empleado para su realización. El hecho de que la velocidad dependa de una magnitud vectorial como lo es el desplazamiento, esto último implica que su naturaleza también se enmarque dentro de las magnitudes vectoriales.

Según [14], [15] y [16], la expresión matemática vectorial que define el observable físico conocido como velocidad está dada por:

$$\vec{v} = \frac{\vec{d}}{t} \tag{42}$$

Por tanto, (42) representa la fórmula general para determinar la velocidad de cualquier cuerpo donde:

- $\vec{v}$: representa la velocidad del cuerpo en movimiento.
- $\vec{d}$: representa el vector de desplamiento del cuerpo en el espacio.
- t: representa el intervalo de tiempo en el que se lleva a cabo el desplazamiento.

j) velocidad media y velocidad instantánea

Entre los tipos de velocidades conocidas en física mecánica tenemos la velocidad media y la velocidad instantánea. Aunque ambas pueden describir la velocidad del cuerpo en determinada posición y el valor de tiempo, tienen sus diferencias bien marcadas, las cuales se explican a continuación en mayor detalle a fin de obtener una mejor comprensión de la temática tratada.

En [17] se expresa que la velocidad media nunca nos suministra una información clara sobre la naturaleza del movimiento. Ahora, con el fin de simplificar el entendimiento de esta afirmación y el mismo concepto de velocidad media, se considera una persona en un auto que viaja en línea recta (trayectoria lineal), la cual parte de una ciudad A y se dirige a una ciudad B. Durante su recorrido, el conductor del auto puede mantener constante su rapidez (magnitud de la velocidad) durante todo el trayecto, o también variarla en diversos intervalos de tiempo durante su traslado. De igual manera que con la rapidez, el conductor puede variar también la dirección del vector de velocidad. Esto nos indica que el chofer tendrá el libre albedrío de cambiar o no su rapidez o su dirección y, por ende, la velocidad del móvil durante su recorrido entre las dos ciudades.

Ahora, si el conductor decidiera en todos los trayectos mantener constante la velocidad de su móvil, es decir, que su rapidez y dirección permanezcan inalterables a medida que pasa el tiempo, entonces, desde el punto de vista físico-estadístico, la velocidad media del auto será la velocidad que mantiene durante todo el viaje. Por ejemplo, en la Fig. 60 se muestra un automóvil que mantiene la misma dirección y rapidez de 50 km/h, por tanto, su velocidad media es de 50km/h$(\hat{I})$.

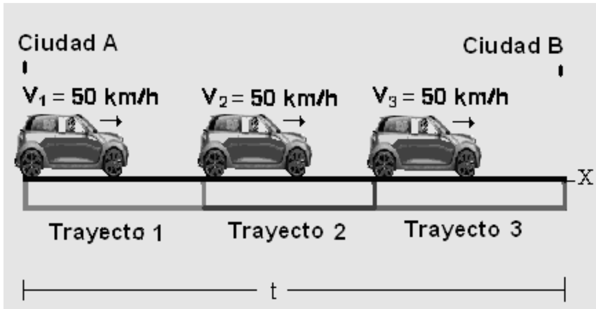


Figura 60. Automóvil que mantiene la velocidad constante durante todos los trayectos en el tiempo *t*. Donde su velocidad media es de 50 km/h $(\hat{i})$. Fuente: elaboración propia

Sin embargo, si el chofer prefiriera en ciertos intervalos de tiempo variar la rapidez o la dirección del auto durante su recorrido en varios trayectos, esto último implicaría también el cambiar su velocidad en cada uno de ellos, ya que tanto la rapidez como la dirección hacen parte de esta. Así, entonces, a fin de obtener la velocidad media del carro se tiene que determinar la media aritmética de los datos obtenidos de las velocidades establecidas en cada uno de los trayectos. Luego, el valor de la media aritmética de velocidad obtenido representa la velocidad media del auto que viaja de la ciudad A a la ciudad B.

En la Fig. 61 se observa un automóvil que mantiene constante su dirección, pero durante los diferentes trayectos varía su rapidez, es decir, la velocidad en cada uno de los trayectos es diferente. Sin embargo, su velocidad media en el tiempo *t* es de 50km/h$(\hat{i})$. Este resultado representaría el mismo caso anterior para el cual la velocidad del auto permanece constante.

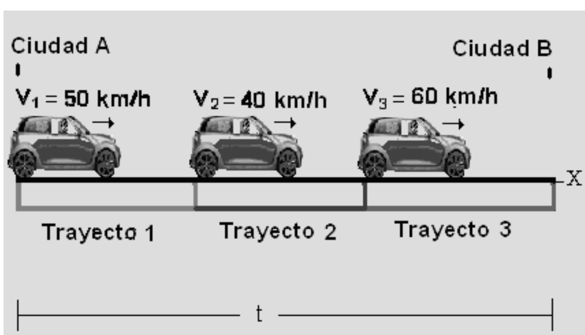


Figura 61. Auto variando su velocidad durante todos los trayectos para ir de la ciudad A a la B. Sin embargo, representa el mismo caso para el cual la velocidad es constante y es de 50 km/h $(\hat{i})$. Fuente: elaboración propia

En sí, la velocidad media de un auto que se traslada entre las ciudades A y B es la velocidad constante que este debe mantener para que el tiempo empleado y el desplazamiento realizado por él durante todo el viaje sean equivalentes con respecto al tiempo total y al desplazamiento alcanzado entre estas mismas ciudades si el conductor del móvil decidiera recorrer el mismo trayecto variando en diversos intervalos de tiempo su velocidad.

Según [16] , [17], [20] y [40], para un cuerpo que se desplaza en una dimensión (eje x), la velocidad media se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{d}}{t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \tag{43}$$

Donde,

- $\bar{\vec{v}}$: representa la velocidad media del cuerpo en movimiento.
- $\Delta\vec{x}$: representa la función de desplazamiento total del cuerpo en movimiento sobre el eje x.
- Δt: representa el intervalo de tiempo en el que se realiza el desplazamiento total.

Ejemplo 8.

Determine la velocidad media del auto que se muestra en la Fig. 62.

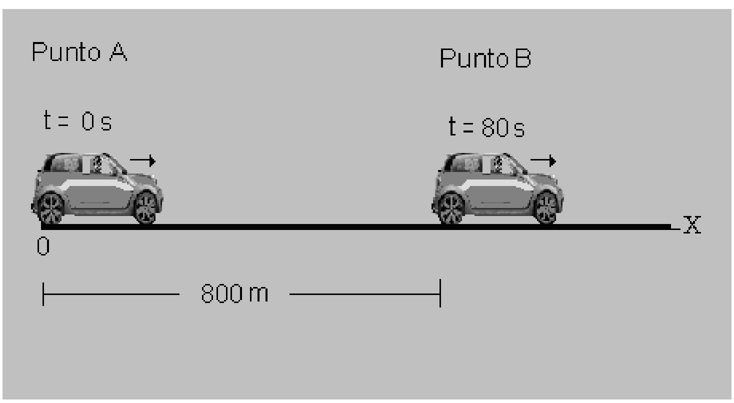


Figura 62. Auto en movimiento entres los puntos A y B, ubicados sobre el eje x positivo, en el que se muestra la distancia y el tiempo empleado para ir del uno al otro. Se observa que el auto parte del origen de un sistema de coordenada unidimensional. Fuente: elaboración propia

Solución

Se observa en la Fig. 62 que el auto se mueve sobre el eje *x* positivo, e inicialmente parte del punto A, el cual se encuentra en el origen del sistema de coordenadas; en este punto el tiempo se considera cero al igual que el vector de desplazamiento inicial. Luego, a medida que el tiempo comienza a transcurrir, el carro empieza a moverse trasladandose hasta el punto final B, el cual se ubica a una distancia de 800 m del origen del sistema de coordenadas y, según el gráfico, el auto invierte un tiempo de 80 segundos para llegar a este último punto.

Del análisis anterior se puede deducir que los vectores de posición inicial y final del auto estan dados por:

$$\vec{x}_i = 0m\hat{I}\ ;\ \vec{x}_f = 800m\hat{I}$$

De igual modo, los tiempos inicial y final para llevar a cabo el desplazamiento entre los puntos A y B quedan expresados así:

$$t_i = 0s\ ;\ t_f = 80s$$

De los valores anteriores se pueden deducir $\Delta\vec{x}$ y $\Delta\vec{t}$, que son:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = 800m\hat{I} - 0m\hat{I} = 800m\hat{I}$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 80s - 0s = 80s$$

Al reemplazar los valores determinados anteriormente de $\Delta\vec{x}$ y de Δt en (43), se halla la velocidad media del auto de la siguiente manera:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{800m\hat{I}}{80s} = 10\frac{m}{s}\hat{I}$$

Este resultado nos da a entender que el auto se mueve a una velocidad media o velocidad constante en la dirección *x* positiva de:

$$\vec{\bar{v}} = 10\frac{m}{s}\hat{I}$$

Ejemplo 9.

Un camión viaja a lo largo de una carretera recta ubicada a lo largo del eje *y* positivo. Si su movimiento es descrito por la gráfica que aparece en la Fig. 63, a) ¿cuál es la velocidad media del camión en la primera hora de su viaje?, b) ¿cuál es la velocidad media del camión entre la primera y la segunda hora?, c) ¿cuál es la velocidad media del camión entre la segunda y la tercera hora?, d) ¿cuál es la velocidad media del camión entre la tercera y cuarta hora?, e) ¿cuál es la velocidad media del camión entre la cuarta y quinta hora?, f) ¿cuál es la velocidad media del camión entre la quinta y sexta hora?, y g) ¿cuál es la velocidad media del camión durante todo su desplazamiento?

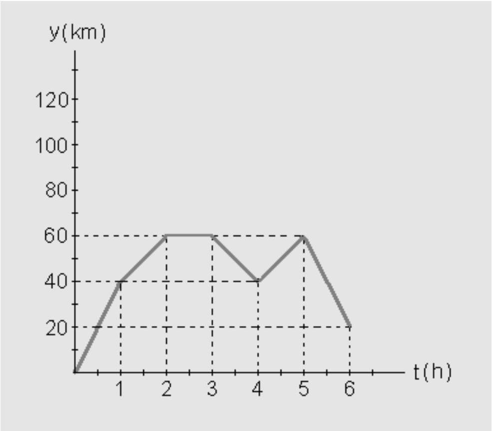


Figura 63. Gráfica de distancia contra tiempo de un camión que se mueve en línea recta en la dirección del eje *y* positivo. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para este caso como el camión se mueve sobre el eje y, se tiene que:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_f - \vec{y}_i = 40\text{km}\hat{J} - 0\text{km}\hat{J} = 40\text{km}\hat{J}$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 1\text{h} - 0\text{h} = 1\text{h}$$

Así, (43), de manera análoga para el eje *y* se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t}$$

Al reemplazar en (43) el vector de desplazamiento $\Delta\vec{y}$ y el valor del intervalo de tiempo Δt determinados en la parte de arriba, se halla la velocidad media del camión en la primera hora de viaje:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{40\text{km}\hat{J}}{1\text{h}} = 40\frac{\text{km}}{\text{h}}\hat{J}$$

El resultado anterior nos da a entender que el camión en la primera hora se mueve a una velocidad media o velocidad constante en la dirección y positiva de:

$$\bar{\vec{v}} = 40\,\frac{km}{h}\hat{J}$$

b. Para este caso tenemos:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_f - \vec{y}_i = 60km\hat{J} - 40km\hat{J} = 20km\hat{J}$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 2h - 1h = 1h$$

Al reemplazar en (43) el vector de desplazamiento $\Delta\vec{y}$ y el valor del tiempo Δt determinados en la parte de arriba, se halla la velocidad media del camión entre la primera y la segunda hora de la siguiente manera:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{20mk\hat{J}}{1h} = 20\frac{km}{h}\hat{J}$$

El resultado anterior nos da a entender que el camión entre la primera y la segunda hora se mueve a una velocidad media o velocidad constante en la dirección *y* positiva de:

$$\bar{\vec{v}} = 20\,\frac{km}{h}\hat{J}$$

c. Para este caso tenemos:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_f - \vec{y}_i = 60km\hat{J} - 60km\hat{J} = 0km\hat{J}$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 3h - 2h = 1h$$

Al reemplazar en (43) el vector de desplazamiento $\Delta\vec{y}$ y el valor del tiempo Δt determinados en la parte de arriba, se encuentra la velocidad media del camión entre la segunda y la tercera hora de la siguiente manera:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{0mk\hat{J}}{1h} = 0\,\frac{km}{h}\hat{J}$$

El resultado anterior nos da a entender que el camión entre la segunda y la tercera hora no se esta moviendo, es decir:

$$\bar{\vec{v}} = 0\frac{km}{h}\hat{J}$$

d. Para este caso tenemos:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_f - \vec{y}_i = 40\text{km}\hat{j} - 60\text{km}\hat{j} = -20\text{km}\hat{j} = 20\text{km}\left(-\hat{j}\right)$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 4\text{h} - 3\text{h} = 1\text{h}$$

Al reemplazar en (43) el vector de desplazamiento $\Delta\vec{y}$ y el valor del tiempo Δt determinados en la parte de arriba, se halla la velocidad media del camión entre la tercera y la cuarta hora, así:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{20\text{km}\left(-\hat{j}\right)}{1\text{h}} = 20\frac{\text{km}}{\text{h}}\left(-\hat{j}\right)$$

El resultado anterior nos da a entender que el camión entre la tercera y la cuarta hora se mueve en la dirección *y* negativa con una velocidad media de:

$$\bar{\vec{v}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\left(-\hat{j}\right)$$

e. Para este caso tenemos:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_f - \vec{y}_i = 60\text{km}\hat{j} - 40\text{km}\hat{j} = 20\text{km}\hat{j}$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 5\text{h} - 4\text{h} = 1\text{h}$$

Al reemplazar en (43) el vector de desplazamiento $\Delta\vec{y}$ y el valor del tiempo Δt determinados en la parte de arriba, se halla la velocidad media del camión entre la cuarta y quinta hora de la siguiente manera:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{20\text{km}\hat{j}}{1\text{h}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,\hat{j}$$

El resultado anterior nos da a entender que el camión entre la cuarta y quinta hora se mueve en la dirección *y* positiva con una velocidad media de:

$$\bar{\vec{v}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,\hat{j}$$

f. Para este caso tenemos:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_f - \vec{y}_i = 20\text{km}\hat{j} - 60\text{km}\hat{j} = 40\text{km}\left(-\hat{j}\right)$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 6\text{h} - 5\text{h} = 1\text{h}$$

Al reemplazar en (43) el vector de desplazamiento $\Delta\vec{y}$ y el valor del tiempo Δt determinados en la parte de arriba, se halla la velocidad media del camión entre la quinta y sexta hora de la siguiente manera:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{40km\left(-\hat{J}\right)}{1h} = 40\frac{km}{h}\left(-\hat{J}\right)$$

El resultado anterior nos da a entender que el camión entre la quinta y sexta hora se mueve en la dirección *y* negativa con una velocidad media de:

$$\bar{\vec{v}} = 40\frac{km}{h}\left(-\hat{J}\right)$$

g. Para este caso tenemos:

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}_f - \vec{y}_i = 20km\hat{J} - 0km\hat{J} = 20km\,\hat{J}$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 6h - 0h = 6h$$

Al reemplazar en (43) el vector de desplazamiento $\Delta\vec{y}$ y el valor del tiempo Δt determinados en la parte de arriba, se halla la velocidad media del camión entre la cero y sexta hora de la siguiente manera:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{20km\hat{J}}{6h} = 3{,}33\,\frac{km}{h}\,\hat{J}$$

El resultado anterior nos da a entender que el camión entre la cero y sexta hora se mueve en la dirección *y* positiva con una velocidad media de:

$$\bar{\vec{v}} = 3{,}33\frac{km}{h}\,\hat{J}$$

Este ejemplo en particular muestra que, de acuerdo con las características de movimiento presentadas por el camión en cada trayecto o intervalo de tiempo, su velocidad media en cada uno de ellos es diferente.

Ahora bien, la velocidad media de un móvil no siempre nos indica la velocidad instantánea del cuerpo en movimiento en cada posición y en todo tiempo, solo en el caso particular para el cual la velocidad del cuerpo permanece constante durante su recorrido esta puede darnos con precisión cómo es el movimiento del cuerpo en cada punto de su trayectoria. Lo anterior nos brinda un indicador de la imposibilidad que existe de utilizar de forma reiterada la velocidad media de un cuerpo en particular como descriptor general de su movimiento (velocidad) en cada una de sus posiciones.

Un concepto muy importante en física, el cual permite dar solución al problema de obtener información sobre la velocidad de un cuerpo en particular en cada valor de tiempo y de su posición a medida que este se mueve, se conoce como "velocidad instantánea". De acuerdo con [18], la velocidad instantánea de un móvil es la que da razón de su dirección y de que tan rápido se mueve en cualquier instante. Desde el punto de vista matemático se encuentra en [17] y [18] definida de la siguiente manera:

$$\vec{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{44}$$

Donde:

- $\vec{v}_{inst}$: representa la velocidad instantánea del cuerpo en movimiento.
- $\Delta \vec{r}$: representa la función de desplazamiento espacial del cuerpo.
- Δt: representa el intervalo de tiempo en el que se realiza el desplazamiento.
- $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$: es la función de velocidad media.

Si se analiza (44), y además se esta familiarizado con el concepto de derivada, se puede concluir que la velocidad instantánea se encuentra enmarcada dentro de este concepto [18]. Lo dicho nos lleva a concluir que la velocidad instantánea es la derivada de la función de posición del cuerpo en el tiempo. Según [19], [20] y [21], matemáticamente la expresión que define a la velocidad instantánea en la parte de arriba esta dada por:

$$\vec{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Es decir:

$$\vec{v}_{inst} = \vec{r}\,' \tag{45}$$

Donde $\vec{r}\,'$ representa la primera derivada de la función vectorial de posición del móvil, es decir:

$$\vec{v}_{inst} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,' \tag{46}$$

Ahora, de la ecuación 3.1 la cual expresa que

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

Al reemplazar esta última expresión en (46) se obtiene:

$$\vec{v}_{inst} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{d\vec{y}}{dt} + \frac{d\vec{z}}{dt} \tag{47}$$

Además, al saber que:

- $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_x$: es la velocidad instantánea del cuerpo en la dirección x.
- $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{v}_y$: es la velocidad instantánea del cuerpo en la dirección y.
- $\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{v}_z$: es la velocidad instantánea del cuerpo en la dirección z.

Si se reemplazan las expresiones anteriores en (47) tenemos que:

$$\vec{v}_{inst} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

Según [17], la expresión anterior también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{v}_{inst} = v_x\hat{I} + x_y\hat{J} + v_z\hat{K} \tag{48}$$

Donde:

- $\frac{dx}{dt} = v_x$: representa el coeficiente escalar de rapidez instantánea del cuerpo en dirección *x*.
- $\frac{dy}{dt} = \vec{v}_y$: representa el coeficiente escalar de rapidez instantánea del cuerpo en dirección *y*.
- $\frac{dz}{dt} = v_z$: representa el coeficiente escalar de rapidez instantánea del cuerpo en dirección *z*.

El hecho de que la velocidad instantánea sea de carácter vectorial nos lleva a expresar su magnitud y su vector unitario en la dirección del vector a través de las siguientes ecuaciones:

$$v_{inst} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{49}$$

$$\hat{r}_{\vec{v}_{inst}} = \frac{\vec{v}_{inst}}{v_{inst}} \tag{50}$$

Donde:

- $\hat{r}\, v_{inst}$: es el vector unitario en la dirección del vector de velocidad instantánea.
- $\vec{v}_{inst}$: es el vector de velocidad instantánea.
- v_{inst}: es la magnitud del vector de velocidad instantánea.

Ejemplo 10.

Se utiliza una nave robot con el fin de explorar la superficie lunar. La superficie de la luna se encuentra en el plano (*xy*) y el módulo de descenso se encuentra en el origen del sistema de coordenadas ($z = 0$). La nave robot, que es considerada un punto, presenta coordenadas *xy* cuyos valores dependen del tiempo de acuerdo con las expresiones: $z = 0$; $x = 3m - (0{,}4\ m/s^2)t^2$; $y = 2\ mt + (0{,}03\ m/s^3)t^3$ (véase la Fig. 64).

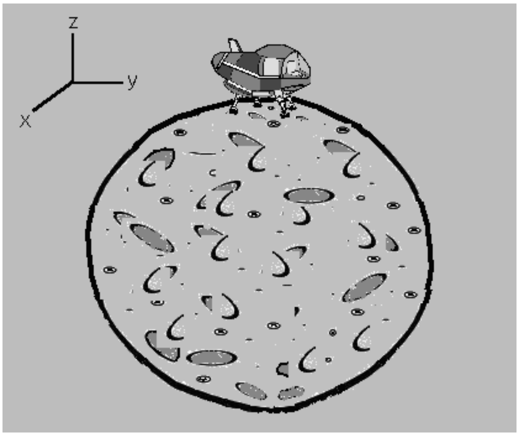


Figura 64. Nave robot explorando la superficie de la luna. Fuente: elaboración propia

a. Determine la expresión general del vector de velocidad instantánea de la nave robot en función del tiempo.

b. Deduzca el vector de velocidad instantanea y su magnitud cuando t =1 s.

c. Determine el vector unitario de dirección de la velocidad instantánea en t = 1 s.

Solución

a. Al hacer uso de (48), la cual permite determinar la velocidad instantánea del robot en cualquier instante de tiempo, es decir:

$$\vec{v}_{inst} = \frac{dx}{dt}\hat{I} + \frac{dy}{dt}\hat{J} + \frac{dz}{dt}\hat{K}$$

Si se reemplazan las expresiones equivalentes a *x*, *y* y *z*, dadas inicialmente en el ejercicio (48), se obtiene:

$$\vec{v}_{inst} = \frac{d}{dt}\left[3m-(0.4m/s^2)\ t^2\right]\hat{I}+\frac{d}{dt}\left[(2m/s)t+(0.03m/s^3)t^3\right]\hat{J}+\frac{d}{dt}\left[0\right]\hat{K}$$

Al realizar las derivadas correspondientes a cada componente vectorial de velocidad en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\vec{v}_{inst} = \left[0-0.8m/s^2)\ t\right]\hat{I}+\left[2m/s + (0.09m/s^3)\ t^2\right]\hat{J}$$

Organizando los términos dentro de los corchetes se llega a:

$$\vec{v}_{inst} = \left[(-0,8m/s^2)\ t\right]\hat{I}+\left[2m/s + (0.09m/s^3)\ t^2\right]\hat{J}$$

Esta última ecuación representa el vector de velocidad instantánea de la nave robot en función del tiempo.

b. Si se reemplaza el valor de t = 1s en la expresión anterior, la cual determina el vector de velocidad instantánea en función del tiempo, se tiene:

$$\vec{v}_{inst} = \left[(-0,8m/s^2)(1s)\right]\hat{I}+\left[2m/s + (0.09m/s^3)(1s)^2\right]\hat{J}$$

Al desarrollar las potencias y los productos indicados en los corchetes se obtiene:

$$\vec{v}_{inst} = \left[(-0,8m/s^2)\ s\right]\hat{I}+\left[2m/s + (0.09m/s^3)s^2\right]\hat{J}$$

Si se simplifican términos semejantes, finalmente se llega a que:

$$\vec{v}_{inst} = (-0,8m/s)\ \hat{I} + (2,09m/s)\hat{J}$$

La expresión anterior representa el vector de velocidad instantánea de la máquina robot cuando t =1s,

Ahora, a fin de determinar la magnitud del vector de velocidad instantánea para t = 1 s se hace uso de (49):

$$V_{inst} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Donde:

$$V_x = -0{,}8m/s \ ; \ V_y = 2{,}09m/s \ ; \ V_z = 0m/s$$

Al reemplazar los valores en (49) se tiene:

$$V_{inst} = \sqrt{(-0{,}8m/s)^2 + (2{,}09m/s)^2 + (0m/s)^2}$$

Si se realizan las potencias indicadas en la raíz, tenemos que:

$$V_{inst} = \sqrt{0{,}64m^2/s^2 + 4{,}36m^2/s^2 + 0m^2/s^2}$$

Al sumar y sacar raíz cuadrada se obtiene:

$$V_{inst} = \sqrt{5m^2/s^2} = 2{,}23m/s$$

c) Para determinar el vector unitario en la dirección del vector de velocidad instantánea se hace uso de (50), es decir:

$$\hat{r}_{\vec{v}_{inst}} = \frac{\vec{V}_{inst}}{V_{inst}}$$

Al reemplazar los términos correspondientes tenemos:

$$\hat{r}_{vinst} = \frac{(-0{,}8m/s)\ \hat{I} + (2.09m/s)\ \hat{J}}{2{,}23m/s}$$

Si se distribuye el término de abajo con respecto a cada uno de los de arriba se obtiene:

$$\hat{r}_{vinst} = \frac{-0{,}8m/s}{2{,}23m/s}\ \hat{I} + \frac{2.09m/s}{2{,}23}\ \hat{J}$$

Al simplificar términos semejantes y dividir valores se obtiene:

$$\hat{r}_{vinst} = -0{,}358\hat{I} + 0{,}937\,\hat{J}$$

El vector unitario anterior es el que le determina la dirección al vector instantáneo de velocidad de la nave robot en el tiempo t = 1 s.

Otra forma de hallar la dirección de cualquier vector es determinando los ángulos de dirección que hacen parte de los cosenos directores expresados en (11) (véase la unidad 2), es decir:

$$\hat{r} = \text{Cos}(\alpha)\,\hat{I} + \text{Cos}(\beta)\,\hat{J} + \text{Cos}(\gamma)\,\hat{K}$$

Si se iguala esta última expresión con el vector unitario de velocidad instantánea hallada en la parte de arriba se tiene:

$$-0{,}358\hat{I} + 0{,}937\hat{J} + 0\hat{k} = Cos(\alpha)\,\hat{I} + Cos(\beta)\,\hat{J} + Cos(\gamma)\,\hat{k}$$

Al comparar la igualdad de vectores expresado en la ecuación anterior, se concluye lo siguiente:

$$Cos(\alpha) = -0{,}358\ ;\ Cos(\beta) = 0.937\ ;\ Cos(y) = 0$$

Si se aplican los cosenos inversos respectivos a cada una de las expresiones anteriores, se determinan los valores de los ángulos directores que le dan la dirección al vector de velocidad instantánea para t = 1 s así:

$$\alpha = 110{,}97^{o}\ ;\ \beta = 20{,}44^{o}\ ;\ \gamma = 90^{o}$$

En la Fig. 65 se muestra la trayectoria seguida por la nave robot ubicada sobre la superficie lunar y situada esta última en el plano *xy*.

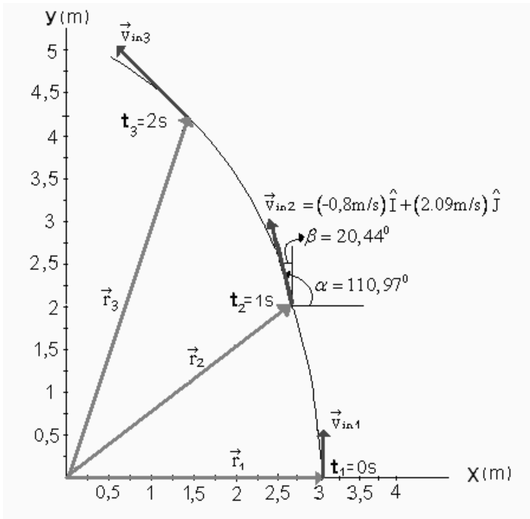


Figura 65. Trayectoria seguida por una nave robot ubicada en la superficie lunar. En el tiempo $t_1 = 0$ su vector de posición es $\vec{r}_1$, y su velocidad instantánea es $\vec{v}_{m1}$, en el tiempo $t_2 = 1$ s, su vector de posición es $\vec{r}_2$ y su velocidad instantánea es $\vec{v}_{m2}$, mientras que para $t_3 = 2$ s, su vector de posición es $\vec{r}_3$ y su vector de velocidad instantánea es $\vec{v}_{m3}$. Fuente: elaboración propia

Ejemplo 11.

Juan, quien es un estudiante de física muy aplicado, observa en un programa de televisión educativa que la posición de cierto punto en la pantalla de su televisor puede determinarse a través de la expresión:

$$\vec{r} = [2cm + (2{,}4cm/s)t]\hat{I} + [(4cm/s^2)t^2]\hat{J}$$

a. Determine la función vectorial de velocidad instantánea del punto.

b. Determine la velocidad instantanea del punto para t = 0s y t = 2 s.

c. Determine la magnitud y la dirección de la velocidad instantanea para t = 0 y t =2 s.

Solución

a. Al hacer uso de (47), es decir:

$$\vec{V}_{inst} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Si se reemplaza la función vectorial $\vec{r}$ en (47), y se distribuye el operador derivada con respecto a cada término direccional vectorial de velocidad, tenemos:

$$\vec{V}_{inst} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\,[2cm + (2{,}4cm/s)t]\hat{I} + \frac{d}{dt}\,[(4cm/s^2)t^2]\hat{J}$$

Al realizar las derivadas correspondientes indicadas en cada una de las direcciones se obtiene:

$$\vec{V}_{inst} = (2{,}4cm/s)\hat{I} + [(8cm/s^2)t]\hat{J}$$

La ecuación anterior es la expresión matemática vectorial que representa la velocidad instantanea del punto en función del tiempo.

b. Al reemplazar valores de tiempo dados, es decir, t = 0 s y t =2 s, en la expresión que representa la velocidad instantánea del punto en cualquier instante de tiempo, se obtienen las velocidades instantáneas pedidas, así:

Para t = 0 s tenemos:

$$\vec{V}_{inst} = (2{,}4cm/s)\hat{I} + [(8cm/s^2)(0s)]\hat{J}$$

Si se realiza la multiplicación indicada en la componente $\hat{J}$ se obtiene:

$$\vec{V}_{inst} = (2{,}4cm/s)\hat{I}$$

La expresión anterior representa la velocidad instantanea del punto para t = 0 s, e indica que el punto solo tiene movimiento en la dirección del eje *x* positivo, ya que la única componente que presenta está en la dirección $\hat{I}$.

Ahora, para t = 2 s tenemos:

$$\vec{V}_{inst} = (2{,}4cm/s)\hat{I} + [(8cm/s^2)(2s)]\hat{J}$$

Al realizar la multiplicación indicada en el corchete de la componente y simplificar términos semejantes se obtiene:

$$\vec{V}_{inst} = (2{,}4cm/s)\hat{I} + (16cm/s)\hat{J}$$

La expresión anterior representa la velocidad instantánea del punto para t = 2 s; esta indica que el punto tiene dos componentes vectoriales de movimiento, una en la dirección $\hat{I}$ y la otra en la dirección $\hat{J}$, es decir, eje *x* y eje *y*.

c) En t = 0 se determinó que la velocidad instantánea para este tiempo es de:

$$\vec{V}_{inst} = (2{,}4cm/s)\hat{I}$$

De esta ecuación de velocidad instantánea se deduce que:

$$V_x = 2{,}4cm/s;\ V_y = 0cm/s\ ;\ V_z = 0cm/s$$

Ahora, al hacer uso de (49), la cual nos permite determinar la magnitud del vector de velocidad instantánea, tenemos:

$$V_{inst} = \sqrt{(2{,}4cm/s)^2 + (0cm/s)^2 + (0cm/s)^2}$$

La expresión anterior se puede escribir así:

$$V_{inst} = \sqrt{(2{,}4cm/s)^2}$$

Dándonos al sacar la raíz cuadrada que:

$$V_{inst} = 2{,}4cm/s$$

El resultado anterior señala que la magnitud del vector de velocidad instantánea del punto para t = 0 s es de 2,4 cm/s. Ahora, el hecho de que la velocidad instantánea del punto solo tenga componente vectorial en la dirección del eje *x* positivo nos lleva a concluir que el vector unitario en la dirección del vector —que es el que le da su dirección— está dado por:

$$\hat{r}_{vinst} = \hat{I}$$

Otra forma de determinar la dirección de un vector es hallando sus ángulos de dirección. Para esto se tiene en cuenta (11) (véase la unidad 2), es decir:

$$\mathrm{Cos}(\alpha)\,\hat{I} + \mathrm{Cos}(\beta)\,\hat{J} + \mathrm{Cos}(\gamma)\,\hat{k} = \hat{r}$$

Al realizar la comparación en la ecuación de arriba se llega a que:

$$Cos\ (\alpha) = 1\ ;\ Cos(\beta) = 0\ ;\ Cos(\gamma) = 0$$

Al aplicarle los cosenos inversos a las expresiones de arriba es posible determinar cuales son los valores de los ángulos de dirección del vector; resultando que:

$$\alpha = 0^o\ ;\ \beta = 90^o\ ;\ y = 90^o$$

Calcular los ángulos de dirección es otra manera de determinar la dirección del vector. Además, el resultado obtenido sugiere que el punto mantiene el movimiento solo sobre el eje *x*.

Ahora, para el caso en el cuál t = 2 s, el vector de velocidad instantánea del punto está dado por la expresión:

$$\vec{V}_{inst} = (2.4cm/s)\,\hat{I} + (16cm/s)\,\hat{J}$$

Si se compara (48) y la expresión de velocidad instantánea del punto en la parte de arriba, donde no aparece la componente en la dirección *z*, se concluye que:

$$V_x = 2.4cm/s \ ; \ V_y = 16cm/s \ ; \ V_z = 0cm/s$$

Al reemplazar los valores anteriores en (49) para determinar la magnitud del vector de velocidad instantánea, tenemos que:

$$V_{inst} = \sqrt{(2.4cm/s)^2 \ (16cm/s)^2 \ (0cm/s)^2}$$

Al realizar las correspondientes potencias indicadas en la raíz y sumar sus resultados se obtiene:

$$V_{inst} = \sqrt{5{,}76cm^2/s^2 + 256cm^2/s^2} = \sqrt{261{,}76cm^2/s^2}$$

Si se saca la raíz cuadrada indicada en la expresión anterior, se encuentra que la magnitud de la velocidad instantánea para t = 2s es de: $V_{inst} = 16{,}18cm/s$.

A fin de determinar la dirección del vector de velocidad instantánea, es decir, el vector unitario en la dirección del vector, se hace uso de (50), es decir:

$$\hat{r}_{V_{inst}} = \frac{\vec{V}}{V_{inst}}$$

Al reemplazar en la expresión anterior las equivalencias correspondientes a los vectores de velocidad y rapidez instantáneas, determinados previamente, tenemos que:

$$\hat{r}_{V_{inst}} = \frac{\vec{V}}{V_{inst}} = \frac{(2{,}4cm/s)\hat{I} + (16cm/s)\hat{J}}{16{,}18cm/s}$$

Si se distribuye el valor ubicado en el denominador de la fracción anterior con respecto a cada una de las componentes vectoriales ubicadas en el numerador, se obtiene:

$$\hat{r}_{V_{inst}} = \frac{\vec{V}}{V_{inst}} = \frac{2,4cm/s}{16,18cm/s}\hat{I} + \frac{16cm/s}{16,18cm/s}\hat{J}$$

Al dividir y simplificar los términos semejantes en cada una de las componentes vectoriales en la expresión anterior, se obtiene el vector unitario que determina la dirección de la velocidad instantánea para este caso en particular, de lo que resulta:

$$\hat{r}_{V_{inst}} = 0,148\hat{I} + 0,989\hat{J}$$

Si se tiene presente (11) (véase la unidad 2), la cual permite determinar el vector unitario en la dirección del vector, es decir:

$$Cos\ (\alpha)\hat{I} + Cos(\beta)\hat{J} + Cos(\gamma)\hat{k} = 0,148\hat{I} + 0,989\hat{J}$$

Al comparar (11) (véase la unidad 2) con la ecuación de arriba se concluye que:

$$Cos\ (\alpha) = 0,148\ ;\ Cos(\beta) = 0,989\ ;\ Cos(\gamma) = 0$$

Lo cual lleva a determinar cuáles son los valores de los ángulos de dirección del vector, cuando t = 2 s, así:

$$\alpha = 81,488^{o}\ ; \beta = 8,506^{o}\ ;\ \gamma = 90^{o}$$

Los valores de ángulos en la parte de arriba proporcionan la dirección del vector de velocidad instantánea para t = 2 s, y es otra forma de determinar la dirección del vector. Además, este resultado sugiere que el vector de velocidad del punto esta ubicado en el plano *xy*.

En la Fig. 66 se muestra la trayectoria seguida por el punto del televisor, los vectores de posición, las velocidades instantáneas y los ángulos de dirección de una de las velocidades para los tiempos t = 0 s, t = 1 s y t = 2 s.

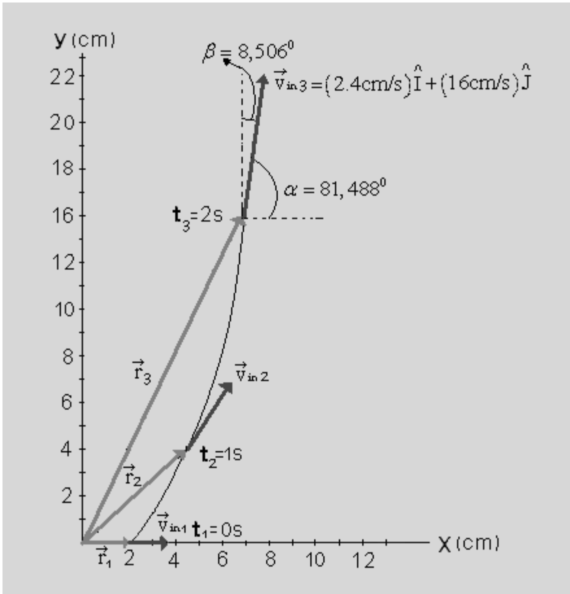


Figura 66. Trayectoria seguida por por el punto de la pantalla de un televisor. En el tiempo $t_1 = 0$ su vector de posición es $\vec{r}_1$, y su velocidad instantánea es $\vec{v}_{m1}$; en el tiempo $t_2 = 1$ s, su vector de posición es $\vec{r}_2$ y su velocidad instantánea es $\vec{v}_{m2}$; mientras que para $t_3 = 2$ s, su vector de posición es $\vec{r}_3$ y su vector de velocidad instantánea es $\vec{v}_{m3}$. Fuente: elaboración propia

j) Concepto de rapidez

Como se mencionó, la mayoría de las personas cometen el error de confundir el concepto de rapidez con el de velocidad. Sin embargo, aunque estos observables físicos están muy relacionados entre sí, son totalmente diferentes, ya que la velocidad pertenece a las magnitudes vectoriales y la rapidez a las escalares. De acuerdo con [18], y desde el punto de vista físico, la rapidez se define como la razón (división) entre la distancia total recorrida por un cuerpo en movimiento y el tiempo empleado en recorrerla. Según [22] y [23], la expresión matemática que la representa está dada por:

$$V = \frac{d}{t} \tag{51}$$

Donde:

- v: representa la rapidez del cuerpo.
- d: representa la distancia total recorrida por el cuerpo en el tiempo t.
- t: representa el tiempo empleado en recorrer la distancia total d.

La rapidez, como es evidente, está definida en términos de dos magnitudes escalares como lo son la distancia y el tiempo. El hecho de que se derive de estos observables físicos netamente escalares lleva afirmar que su naturaleza es del mismo tipo. Algo que no se debe olvidar es que la rapidez es la magnitud del observable físico vectorial denominado “velocidad”, y su unidad de medida en el sistema (MKS) —como se trató en la unidad 1— es el m/s.

De igual manera, recuérdese que en la velocidad existen dos tipos de rapidez:

- **La rapidez media y la rapidez instantánea.**

Con respecto al concepto de rapidez media, considerese cómo un móvil que viaja de un punto a otro puede variar su rapidez en ciertos trayectos o intervalos de tiempo durante todo el recorrido, tal como se puede observar en la Fig. 67. Sin embargo, su movimiento se puede simplificar si consideramos que este se mueve a cierta rapidez constante, la cual se determina al sacar la media aritmética de todos los posibles valores de rapidez que pueda adquirir el cuerpo durante todo el camino para ir del primer punto al segundo. A esta rapidez constante es lo que se conoce como “rapidez media”.

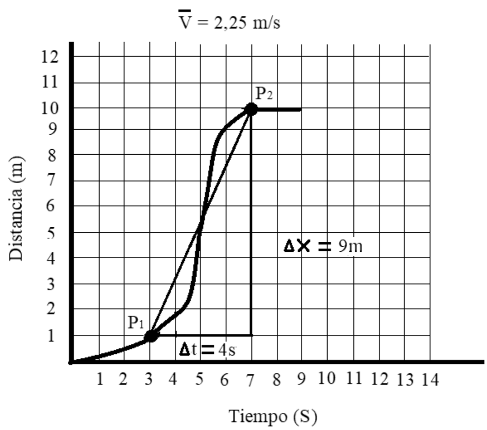


Figura 67. Gráfica de posición contra tiempo de un móvil con rapidez variable.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [23], la rapidez media de un móvil durante cualquier parte de su recorrido es la pendiente de la recta desde el inicio hasta el final de esa parte de la curva distancia-tiempo. Por ejemplo, en la Fig. 67 se observa que la pendiente o rapidez media de la parte curva enmarcada entre los puntos p_1

y p_2 es de 2,25 m/s. Ahora, de todo lo expresado en el párrafo de arriba y en las líneas anteriores se puede concluir que la rapidez media de un móvil que se traslada entre dos puntos es aquella rapidez constante que este debe mantener para que el tiempo empleado y la distancia abarcada por él durante el viaje sean equivalentes, respectivamente, al tiempo total y a la distancia entre estos mismos puntos, si el conductor del móvil decidiera recorrer el mismo trayecto y variar en diversos intervalos de tiempo su rapidez.

Desde el punto de vista matemático y para un cuerpo que se desplaza en una dimensión (eje *x*), la magnitud de la velocidad media (rapidez media) en la literatura se encuentra definida de la siguiente manera [1], [23]:

$$\overline{V} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{t} \tag{52}$$

Donde:

- $\overline{V}$: representa la rapidez media que tiene el móvil que se mueve sobre el eje *x*.
- x_i: representa la distancia inicial a la que se encuentra el móvil con respecto al origen del sistema de referencia en el tiempo inicial t_i en el que se comienza a observar el movimiento del cuerpo.
- x_f: representa la distancia final a la que se encuentra el móvil con respecto al origen del sistema de referencia en el tiempo final x_f en el que se conoce la última posición del cuerpo.
- t_i: representa el tiempo inicial de observación del móvil.
- t_r: representa el tiempo final de observación del móvil.
- Δx: representa la distancia total recorrida entre el punto x_i y x_f.
- Δt: representa el intervalo de tiempo en el que el cuerpo recorre la distancia total $\Delta x = d$.
- d: representa la distancia total recorrida en el tiempo $\Delta t = t$.

Ejemplo 12.

a) Determine de la Fig. 68 la rapidez media del perro que parte del punto A y llega al punto B.

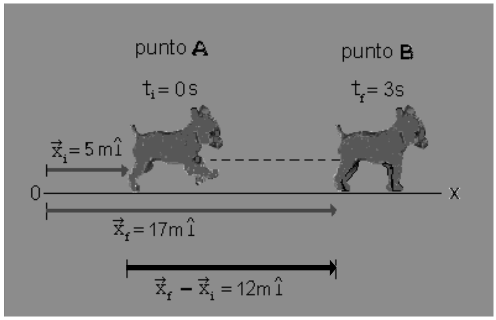


Figura 68. Perro trasladandose del punto A al punto B, los cuales están separados por una distancia de 12 m, tal como se ilustra en la gráfica. Se puede observar que el tiempo empleado por el perro para recorrer la distancia que separa los dos puntos es de 3 s. Fuente: elaboración propia

Solución

De la Fig. 68 se pueden deducir los vectores de posición inicial y final del perro. De la misma manera, el tiempo inicial que es igual a cero, ya que es el momento en el que se empieza a observar su movimiento. También se obtiene el tiempo final, es decir, el que emplea el animal para desplazarse del punto A al punto B. En razón a lo expresado anteriormente tenemos:

$$x_i = 5m \; ; x_f = 17m \; ; t_i = 0s \; ; t_r = 3s$$

Al reemplazar los valores enteriores en (52) se obtiene:

$$\overline{V} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{17m - 5m}{3s - 0s} = \frac{12m}{3s} = 4m/s$$

Del resultado anterior se puede concluir que la rapidez media del perro, es decir, la rapidez constante que él puede aplicar en un tiempo de 3 s para ir del punto A al punto B, con el fin de recorrer la distancia de 12 m entre estos puntos, es de $\overline{V}$=4m/s .

Si observamos detenidamente el resultado hallado de la rapidez media del perro, este es un valor y no un vector; lo anterior debido a que la rapidez es una magnitud escalar.

Ejemplo 13.

a. Determine de la Fig. 63 la rapidez media del camión comprendida entre el intervalo de tiempo definido en t =1 h y t = 3 h, y b) entre t = 0 y t = 6 h.

Solución

De la Fig. 63 se deduce que en t_i = 1 h la posición del camión es de x_i = 40 km, mientras que para t_f = 3 h se encuentra a una distancia con respecto al origen del sistema de coordenadas de x_f = 60 km.

a. Ahora, al hacer uso de (52), donde en esta reemplazamos los valores de distancia y tiempo definidos en la parte de arriba, tenemos:

$$\overline{V} = \frac{60\text{km} - 40\text{ km}}{3\text{h} - 1\text{h}} = \frac{20\text{km}}{2\text{h}} = 10\text{km/h}$$

Es decir, la rapidez media del camión entre t = 1 h y t = 3 h es de $\overline{V}$=10km/h.

b. Al hacer uso de (52), es decir $\overline{V} = \frac{d}{t}$, con d = 140 km; t = 6 h, tenemos que:

$$\overline{V} = \frac{140\text{km}}{6\text{h}} = 23{,}33\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ahora bien, con respecto al concepto de rapidez instantánea, se debe tener en cuenta que la rapidez media de un cuerpo no siempre indica la rapidez instantánea de este en cada posición y en todo instante de tiempo. Solo en el caso particular para el cual la rapidez del cuerpo permanece constante durante su recorrido esta puede darnos con precisión cómo es el movimiento del cuerpo en cada punto de su trayectoria. Lo anterior nos muestra la imposibilidad que existe de utilizar de forma reiterada la rapidez media de un cuerpo en particular como descriptor general de su movimiento (rapidez) en cada una de sus posiciones.

Un concepto importante en física que nos permite dar respuesta al problema de obtener información sobre la rapidez de un cuerpo en particular, en cada instante de tiempo y posición, a medida que este se mueve a través de una trayectoria, se conoce como "rapidez instantánea". Esta última afirmación está de acuerdo con los planteamientos de [24], quien expresa que la rapidez, en cualquier instante, es la rapidez instantánea.

De acuerdo con [23], [25] y [27], la expresión matemática que define la rapidez instantánea está dada por medio del siguiente límite:

$$V_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Donde:

- V_{inst}: representa la rapidez instantánea del cuerpo en movimiento.
- Δr: representa la función que le define la trayectoria espacial al cuerpo.
- Δr: representa el intervalo de tiempo en el que se recorre la trayectoria.
- $\frac{\Delta r}{\Delta t}$: es la función espacial de rapidez media.

De acuerdo con lo que se expresa en [7] y [27], la ecuación de arriba, la cual define la rapidez instantánea tridimensional, se puede expresar también a través de la siguiente expresión:

$$V_{inst}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{dr}{dt}$$

Es decir:

$$V_{inst}=\frac{dr}{dt}=r' \qquad (53)$$

Donde r´ representa la primera derivada de la función escalar de posición del móvil, es decir:

$$r'=\frac{dr}{dt} \qquad (54)$$

Ejemplo 14.

La función escalar de posición de un cuerpo en movimiento se encuentra definida por medio de la expresión $r(t) = (4m/s^{2)}\ t^2 - (3m/s)t - 10m$.

a) Determine la rapidez instantánea del objeto para los siguientes valores de tiempo t = 0 s; t = 1 s; t = 2 s.

Solución

Mediante (53), la cual permite determinar la función de velocidad instantánea en función del tiempo, tenemos:

$$V_{inst}(t)=\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left[(4m/s^2)t^2-(3m/s)t-10m\right]$$

Al derivar con respecto al tiempo cada uno de los términos que se encuentran dentro del corchete, se obtiene la rapidez instantánea del cuerpo en función del tiempo, así:

$$V_{inst}(t) = 8(m/s^2)t - 3m/s$$

Ahora, se procede a determinar los valores de rapidez para los tiempos pedidos en el ejercicio para t = 0 s, se encuentra que:

$$V_{inst}(0) = 8(m/s)(0s) - 3m/s = -3m/s$$

Para t = 1 s se encuentra que:

$$V_{inst}(1s) = 8(m/s^2)(1s) - 3m/s$$

Si se simplifican términos semejantes y se realizan las operaciones indicadas, tenemos:

$$V_{inst}(1s) = 8m/s - 3m/s) = 5m/s$$

Para t = 2 s tenemos:

$$V_{inst}(2s) = 8(m/s^2)(2s) - 3m/s$$

Al simplificar términos semejantes y realizar las operaciones indicadas tenemos que:

$$V_{inst}(2s) = 16m/s - 3m/s = 13m/s$$

La Fig. 69 muestra la trayectoria descrita por el cuerpo durante su movimiento, la cual se determina a través de la función *r(t)*. De igual manera, se expresa la rapidez instantánea que presenta el móvil en cada uno de los tiempos para los cuales se pidió su valor.

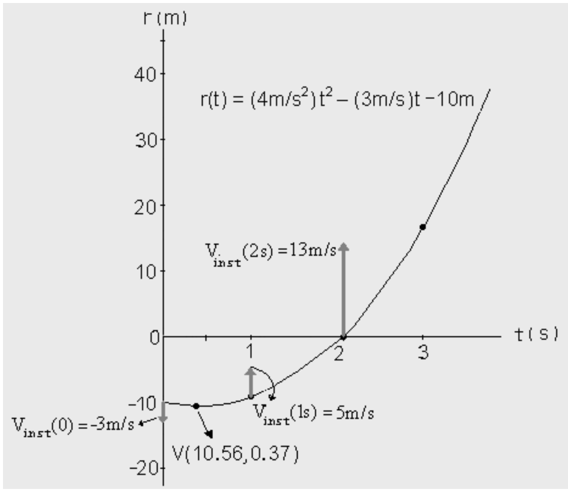


Figura 69. Gráfica de posición contra tiempo del cuerpo en movimiento cuya trayectoria está descrita por medio de la función r(t) = (4 m/s^2) t^2 - (3 m/s)t -10 m. En esta se muestra la rapidez que presenta el cuerpo para los tiempos: t = 0 s; t = 1 s y t = 2 s. Fuente: elaboración propia

k) Concepto de aceleración

De acuerdo con [24] y [25], un cuerpo en movimiento presenta aceleración siempre que exista un cambio en su velocidad a medida que se le realiza su observación o estudio. Ahora, para que se pueda afirmar que el móvil varía su velocidad debe presentar las siguientes características:

- Que el móvil varíe la magnitud de su velocidad, es decir, su rapidez.
- Que el móvil varíe la dirección de su velocidad, es decir, sus ángulos de dirección espacial.
- Que el móvil varíe tanto la magnitud como la dirección de su velocidad.

Si el móvil, durante su movimiento, no presenta ninguna de las características anotadas, no se puede afirmar que se encuentra acelerado. Ahora, en el área de conocimiento de la física mecánica encontramos dos tipos de aceleraciones: una es la aceleración media y la otra es la aceleración instantánea. Estas presentan diferencias bien marcadas que se detallan a continuación.

• Aceleración media y aceleración instantánea

Con el fin de simplificar el problema y además explicar en detalle el concepto de aceleración media se analizará el siguiente caso.

Un ciclista viaja de una ciudad A a otra ciudad B, en un camino que es totalmente recto. En este se encuentra huecos y piedras que obstaculizan el paso normal en algunos de sus trayectos. El ciclista debe llegar al otro pueblo lo más pronto posible, y para lograrlo quiere mantener una aceleración constante $\vec{\alpha}$, o sea, debe presentar cambios constantes en velocidad en igual tiempo. Sin embargo, debido a los problemas citados (piedras y huecos en el camino), esto causará que el conductor de la cicla deba disminuir su velocidad de forma abrupta, acarreando esto último que su aceleración se vea también afectada en ciertos tramos (aceleración variable) (véase la Fig. 70).

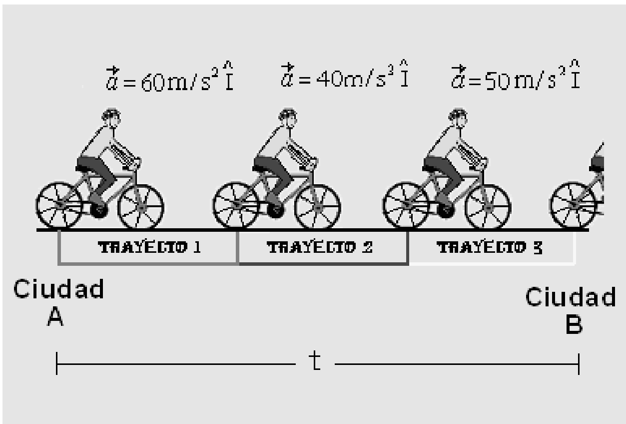


Figura 70. Ciclista que viaja de una ciudad A a otra ciudad B con aceleración variable debido a obstáculos que se le presentan en el camino. Fuente: elaboración propia

Sin embargo, a fin de caracterizar su movimiento es posible pensar que viajó a una misma aceleración (aceleración constante) para hacer el recorrido en el mismo tiempo empleado en el primer caso, es decir, con aceleración variable. A la aceleración constante anterior es a la que se le denomina "aceleración media", y, según [40], matemáticamente se representa por $\bar{\vec{\alpha}}$.

En la Fig. 71 se muestra al ciclista mostrado en la Fig. 70 moviéndose a una magnitud de aceleración media de 50 m/s en la dirección *x* positiva, y emplea el mismo tiempo *t* en recorrer trayectos equivalentes incluidos entre la distancia que separa las dos ciudades.

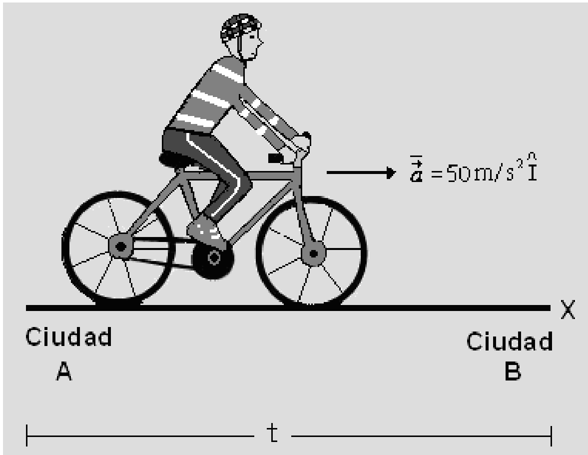


Figura 71. Ciclista trasladándose con aceleración constante $\vec{\bar{\alpha}} = 50 m/s^2$ entre las ciudades A y B. Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [20] y [40], la ecuación matemática que le define a un móvil en una dimensión la magnitud de su vector de aceleración media esta dada por:

$$\bar{\alpha} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \tag{55}$$

Según [22], y de acuerdo con lo mencionado en [40], la expresión matemática vectorial que representa al observable físico llamado “aceleración media de un móvil cualquiera”, está dada por:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{56}$$

Donde:

- $\vec{\bar{\alpha}}$: representa la aceleración media del cuerpo en movimiento en el intervalo de tiempo Δt.
- $\vec{v}_i$: representa la velocidad inicial del cuerpo en el tiempo inicial t_i.
- $\vec{v}_f$: representa la velocidad final del cuerpo en el tiempo final t_i r.
- t_i: representa el tiempo en el que se mide la velocidad inicial $\vec{v}_i$ del cuerpo.
- t_f: representa el tiempo en el que se mide la velocidad final $\vec{v}_f$ del cuerpo.
- $\Delta \vec{v}$: representa el cambio de velocidad.
- Δt representa el intervalo de tiempo en el que se realiza el cambio de velocidad.

Se puede afirmar que la aceleración media representa la media aritmética de los valores de aceleración que puede presentar el ciclista en los diferentes trayectos en el que se pudiera dividir el trazado de su recorrido, tal como se vio en el ejemplo desarrollado.

Ejemplo 15.

Un auto parte del reposo desde el origen de coordenadas con aceleración constante $\vec{\alpha}$ y alcanza en un tiempo de 30 s una rapidez de 300 m/s. Calcule: a) su aceleración media imprimida, y b) la magnitud de su aceleración (véase la Fig. 72).

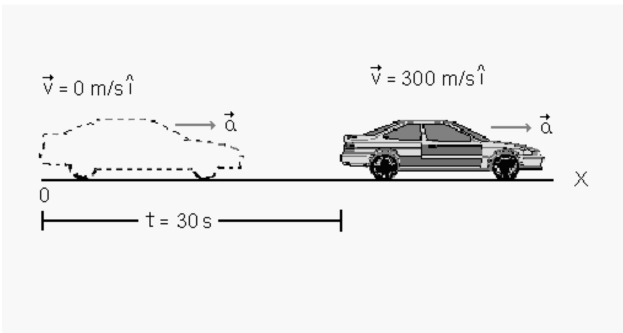


Figura 72. Auto que parte del reposo desde el origen de coordenadas, con aceleración constante $\vec{\alpha}$; se observa que en t = 30 s este alcanza una rapidez de v = 300 m/s. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Al analizar el texto del ejercicio se concluye que para t = 0 el auto presenta una velocidad inicial de $\vec{v}_i = 0$, mientras que para t = 30 s el auto presenta una velocidad final de $\vec{v} = 30\text{m/s}\hat{I}$. Al tener presente (56), la cual define la aceleración media de cualquier móvil, es decir:

$$\bar{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

Si se reemplazan los valores de tiempo y los vectores de velocidad inicial y final del auto en (56), se obtiene:

$$\vec{\alpha} = \frac{300\text{m/s}\hat{I} - 0\text{m/s}\hat{I}}{30\text{s} - 0\text{s}}$$

Al realizar las operaciones indicadas en la parte de arriba, tenemos que la aceleración media del auto es de:

$$\vec{\alpha} = 10\text{m/s}^2\hat{\text{I}}$$

Del resultado de la aceleración del inciso anterior se concluye que la magnitud del vector de aceleración media es de $\alpha = 10\text{m/s}^2$.

Ejemplo 16.

El ciervo 1 en la Fig. 73 sale corriendo con aceleración constante a confrontar al ciervo 2, el cual pasó desprevenido por su territorio. Si en el tiempo $t_1 = 2$ s la rapidez del ciervo en función de ataque era de 10 m/s, y en el instante de impactar a su oponente, es decir, en el tiempo $t_2 = 4$ s su rapidez es de 50 m/s, ¿cuál es el valor de la aceleración media del ciervo 1?

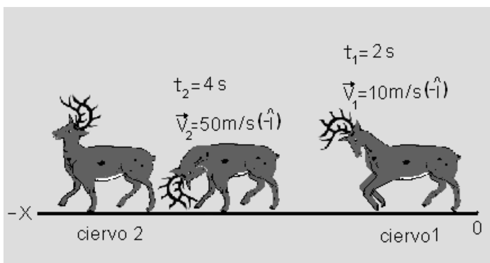


Figura 73. Ciervo atacando a otro ciervo intruso que pasa por su territorio; en el tiempo $t_1 = 2$ s su rapidez es de v = 10 m/s, y en el tiempo t_2 en el cual impacta a su oponente presenta una rapidez de v = 50 m/s. Fuente: elaboración propia

Solución

Al tener presente (56), la cual permite determinar la aceleración media de un móvil, es decir:

$$\bar{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

De la Fig. 73 se puede deducir, entonces, que los valores de tiempo y los vectores de velocidad correspondientes a las dos posiciones que presenta el ciervo 1 están definidos de la siguiente manera:

$$t_i = t_1 = 2\text{s} \; ; \; \vec{v}_i = \vec{v}_1 = 10\text{m/s}(-\hat{\text{I}})$$

$$t_f = t_2 = 4\text{s} \; ; \; \vec{v}_f = \vec{v}_2 = 50\text{m/s}(-\hat{\text{I}})$$

Al reemplazar las expresiones anteriores de tiempo y velocidad final e inicial en (56) se tiene:

$$\bar{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha} = \frac{50\text{m/s}(-\hat{\text{I}}) - 10\text{m/s}(-\hat{\text{I}})}{4\text{s}-2\text{s}}$$

Si se aplica la ley de signos en los términos del numerador en la expresión anterior para destruir los paréntesis se obtiene que:

$$\vec{\alpha} = \frac{-50\text{m/s}\hat{\text{I}} + 10\text{m/s}\hat{\text{I}}}{4\text{s}-2\text{s}}$$

Al realizanr las operaciones de resta, tanto en el numerador como en el denominador en esta última expresión, obtenemos el valor de aceleración media imprimida por el ciervo 1:

$$\vec{\alpha} = \frac{-40\text{m/s}\hat{\text{I}}}{2\text{s}} = -20\text{m/s}^2\hat{\text{I}}$$

La aceleración media del ciervo se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\vec{\alpha} = 20\text{m/s}^2\,(-\hat{\text{I}})$$

No obstante, se debe tener claro que la aceleración media de un móvil no siempre nos indica la aceleración instantánea del cuerpo en movimiento en cada posición y en todo tiempo. Solo en el caso particular en el que la aceleración del cuerpo permanece constante durante su recorrido (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado), esta puede proporcionarnos con precisión cómo es el movimiento del cuerpo en cada punto de su trayectoria.

El análisis anterior brinda un indicador de la imposibilidad que existe de utilizar de forma general la aceleración media de un cuerpo en particular como descriptor de su movimiento en cada una de sus posiciones. Sin embargo, existe un concepto muy importante en la física que permite darle solución a este problema de obtener información sobre la aceleración del móvil en cada instante de tiempo, el cual se conoce como "aceleración instantánea".

Ahora, de acuerdo con [18], [25] y [27], la aceleración instantánea se define como el límite de la aceleración promedio cuando Δt tiende a cero. Es decir, desde el punto de vista matemático vectorial, la aceleración instantánea se representa por medio de la expresión:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{57}$$

Donde:

- $\vec{\alpha}_{inst}$: representa la aceleración instantánea del cuerpo en movimiento.
- $\Delta\vec{v}$: representa el incremento de velocidad del cuerpo.
- Δt: representa el intervalo de tiempo en el que se lleva a cabo el incremento de velocidad.
- $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$: es la función de aceleración media.

Si analizamos en detalle (57), además de estar familiarizado con el concepto de derivada, es evidente que la aceleración instantánea se encuentra enmarcada dentro de este concepto, es decir, queda definida a través de la primera derivada de la función de velocidad del cuerpo.

De acuerdo con [5], la expresión matemáticamente vectorial que define a la aceleración instantánea esta dada por:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Es decir:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{58}$$

Donde $\frac{d\vec{v}}{dt}$ es la derivada de la función de velocidad.

Al hacer uso de (46) y (58) es posible deducir también que la aceleración instantánea del móvil se puede definir como la segunda derivada de su función vectorial de posición, así:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}\,''$$

Es decir, de acuerdo con [27]:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \vec{r}\,'' \tag{59}$$

Donde $\vec{r}\,''$ representa la segunda derivada de la función vectorial de posición con respecto al tiempo, del cuerpo en movimiento, es decir:

$$\alpha_{inst} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}\,'' \qquad (60)$$

Ejemplo 17.

La función vectorial de posición espacial respecto al tiempo de una avioneta acrobática determinada por un observador esta definida a través de la expresión:

$$\vec{r} = [(3m/s)t - (2m/s^3)t^3]\hat{I} - [(5m/s^2)t^2 + (1m/s)t]\hat{J} + [(10m/s)t]\hat{k}$$

Calcule:

a. El vector de aceleración instantánea de la avioneta en función del tiempo.
b. El vector de aceleración instantánea de la avioneta en t = 1 s y t =2 s.
c. Determine la magnitud de la aceleración intantánea de la nave para t =1 s y t = 2 s.

Solución

a. De (60) sabemos que la función vectorial de aceleración instantánea está definida a través de la segunda derivada respecto al tiempo de la función de posición de la nave, es decir:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \vec{r}\,''$$

Con el fin de dar respuesta al planteamiento del problema, determinamos inicialmente la primera derivada de la función vectorial de posición de la avioneta, la cual desde el punto de vista físico representa la función de velocidad instantánea de la nave; así, se tiene que:

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[[(3m/s)t - (2m/s^3)t^3]\hat{I} - [(5m/s^2)t^2 + (1m/s)t]\hat{J} + [(10m/s)t]\hat{k}\right]$$

Al derivar término a término cada una de las componentes vectoriales de la función de posición de la nave que se encuentra dentro del corchete mayor en la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{r}\,' = [3m/s - (6m/s^3)t^2]\hat{I} - [(10m/s^2)t + 1m/s]\hat{J} + (10m/s)\hat{k}$$

Se procede ahora a determinar la segunda derivada de la función vectorial de posición de la nave, la cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{r}'' = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Si se reemplaza en la ecuación anterior la primera derivada de la función de desplazamiento de la avioneta determinada anteriormente tenemos:

$$\vec{r}'' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[[(3m/s - (6m/s^3)t^2]\hat{I} - [(10m/s^2)t + 1m/s]\hat{J} + (10m/s)\hat{k}\right]$$

Al derivar cada una de las componentes vectoriales que se encuentran en el corchete mayor de la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{r}'' = [-(12m/s^3)t]\hat{I} - [(10m/s^2)]\hat{J} + (0)\hat{k}$$

De (60) y la expresión matemática-vectorial de arriba se concluye que la función de aceleración instantánea de la avioneta en cualquier instante de tiempo queda expresada de la siguiente manera:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \left[(-12m/s^3)t\right]\hat{I} - (10m/s^2)\hat{J}$$

La ecuación de aceleración instantánea anterior de la nave también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \left[(12m/s^3)t\right](-\hat{I}) + 10m/s^2\,(-\hat{J})$$

De la expresión anterior se puede concluir que la componente de aceleración instantánea de la nave en dirección del eje *x* es variable en el tiempo, mientras que la componente en dirección del eje *y* es constante, es decir, no depende de *t*.

b. Al reemplazar t = 1 s en la ecuación de aceleración instantánea de la avioneta tenemos:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \left[(12m/s^3)(1s)\right](-\hat{I}) + 10m/s^2\,(-\hat{J})$$

Si se multiplica en la primera componente vectorial de la expresión anterior y se simplifican términos semejantes, se obtiene finalmente la aceleración instantánea de la avioneta para t = 1 s, así:

$$\vec{\alpha}_{inst} = 12m/s^2\,(-\hat{I}) + 10m/s^2\,(-\hat{J})$$

Para t = 2 s tenemos:

$$\vec{\alpha}_{inst} = \left[(12m/s^3)(2s) \right](-\hat{I}) + 10m/s^2\,(-\hat{J})$$

Al realizar la multiplición indicada en la primera componente vectorial de la expresión anterior y simplificar términos semejantes, se obtiene finalmente la aceleración instantánea de la avioneta para t = 2 s, así:

$$\vec{\alpha}_{inst} = 24m/s^2\,(-\hat{I}) \;+\; 10m/s^2\,(-\hat{J})$$

Los resultados anteriores de aceleración instantánea de la avioneta para t = 1 s y t = 2 s ratifican lo dicho en la parte de arriba, es decir, muestran que está, en dirección del eje *x*, tiene una magnitud de aceleración variable, mientras que en dirección del eje *y* su magnitud permanece constante.

c. Al hacer uso de los resultados anteriores se determinan las magnitudes de las aceleraciones instantáneas de la nave para los correspondientes tiempos, así:

$$\text{Para } t = 1s\ a_{inst} = \sqrt{(12m/s^2)^2 + (10m/s^2)^2} = \sqrt{244}m/s^2 = 15{,}62m/s^2$$

$$\text{Para } t = 2s\ a_{inst} = \sqrt{(24m/s^2)^2 + (10m/s^2)^2} = \sqrt{676}m/s^2 = 26m/s^2$$

Ejemplo 18.

Una persona que se encuentra pescando en una canoa en alta mar observa el movimiento de un delfín sobre la superficie del agua. Registra su función posición y determina que esta dada por la expresión $\vec{r} = \left[(4m/s)t\right]\hat{I} + \left[(3m/s^2)t^2\right]\hat{J}$: a) determine la función de aceleración instantánea del delfín; b) ¿cuál es la aceleración instantánea del delfin en t = 0,5 s y en t = 1s?; c) ¿cuál es la magnitud de aceleración instantánea del delfín para t = 0,5 s y t = 1 s?

Solución

a. Con el fin de dar respuesta a las preguntas formuladas, iniciamos la solución a la primera de ellas determinando la primera derivada de la función de posición vectorial del delfín, así:

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Al reemplazar la función de posición del delfín en la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[[(4m/s)t]\hat{\imath} + [(3m/s^2)t^2]\hat{\jmath}\right]$$

Si se realiza la derivada respecto al tiempo de cada una de las componentes vectoriales indicadas en la expresión anterior, se obtiene:

$$\vec{r}' = [(4m/s)]\hat{\imath} + \left[(6m/s^2)t\right]\hat{\jmath}$$

De (60) se deduce que:

$$\vec{\alpha}_{\text{inst}} = \vec{r}'' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Al reemplazar en la expresión anterior la primera derivada de la función de posición determinada anteriormente se tiene que:

$$\vec{\alpha}_{\text{inst}} = \frac{d}{dt}\left[[(4m/s)]\hat{\imath} + \left[(6m/s^2)t\right]\hat{\jmath}\right]$$

Al realizar las derivadas de cada uno de las componentes vectoriales indicadas en el corchete mayor en la expresión anterior se tiene:

$$\vec{\alpha}_{\text{inst}} = (0m/s)\hat{\imath} + (6m/s^2)\hat{\jmath}$$

Finalmente, se encuentra que la función de aceleración instantánea del delfín queda expresada por la ecuación:

$$\vec{\alpha}_{\text{inst}} = (6m/s^2)\hat{\jmath}$$

La ecuación anterior nos indica que el delfín solo presenta aceleración en dirección del eje *y*, y además esta es constante en el tiempo.

b. Como se observa en la función de aceleración instantánea anterior determinada en el primer inciso, esta no depende de la variable tiempo *t*, es decir, ella es una constante de movimiento, por tanto, la aceleración para *t* = 0,5 s y t = 1 s es la misma en ambos casos, es decir:

$$\vec{\alpha}_{\text{inst}} = (6m/s^2)\hat{\jmath}$$

c. De acuerdo con la expresión anterior de aceleración instantánea del delfín, su magnitud en cada uno de los tiempos es la misma, es decir:

$$\alpha_{\text{inst}} = 6m/s^2$$

C. Movimiento en una dimensión

El movimiento en una dimensión se presenta cuando la trayectoria descrita por un cuerpo en movimiento es una línea recta [18], [26], [27]. Según [22], esto ocurre cuando se acuerda que la línea de movimiento sea un eje coordenado, lo cual permite simplificar las cosas. Esto significa que si un camión se desplaza sobre una carretera totalmente recta, se dice que su movimiento es en una dimensión, tal como se observa en la Fig. 74.

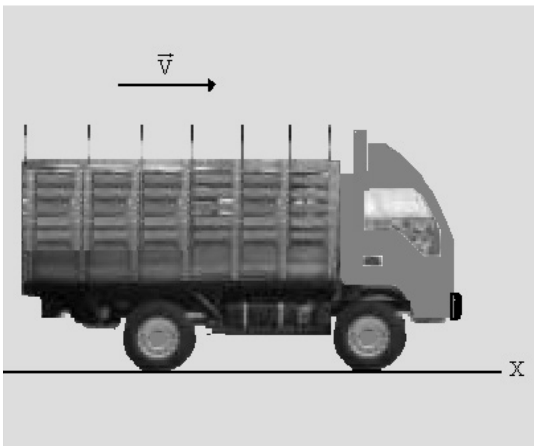


Figura 74. Camión moviéndose en una dimensión, es decir, sobre el eje *x*+.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con las características físicas que presenten los observables físicos (velocidad, rapidez, aceleración, desplazamiento, distancia) del cuerpo que se mueve en una dimensión, su movimiento se define como movimiento rectilíneo uniforme o movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

1) Movimiento rectilíneo uniforme

De acuerdo con [27], es aquel que se realiza a velocidad constante. Ahora, para que el movimiento de un cuerpo en particular sea reconocido como un movimiento rectilíneo uniforme, observables físicos tales como el desplazamiento, la distancia recorrida, la aceleración, la velocidad y la rapidez deben presentar las siguientes características [1]:

- A intervalos de tiempos iguales el desplazamiento del cuerpo debe ser siempre el mismo.
- La magnitud del vector de desplazamiento del cuerpo, la cual es una distancia, debe ser siempre igual a la longitud de su trayectoria recorrida, medidas ambas en el mismo intervalo de tiempo y desde el mismo origen del sistema de referencia elegido.
- El desplazamiento y la velocidad deben presentar la misma dirección y sentido en todo tiempo.
- En igual unidad de tiempo, es decir, en tiempos equivalentes, el cuerpo en movimiento recorrerá siempre la misma distancia y, por ende, se obtendrá el mismo desplazamiento.
- La velocidad debe ser constante. Lo anterior implica que el cuerpo o móvil durante su movimiento tenga que mantener invariable su rapidez y dirección, debido a que estas son las componentes principales del vector llamado "velocidad". Además, como ya es de conocimiento, para que un vector permanezca constante recordemos que solo se necesita que tanto su magnitud como su dirección no varíen a medida que el tiempo transcurrre.
- La rapidez del móvil debe coincidir siempre con la magnitud de su velocidad.
- La magnitud de la aceleración del cuerpo en movimiento en todo tiempo es cero.

Según [27], la expresión matemática vectorial general que permite resolver cualquier problema en el que se involucra un móvil que se desplaza sobre el eje *x* con movimiento rectilíneo uniforme está dada por:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} \tag{61}$$

Donde:

- $\vec{v}$: representa la velocidad constante del cuerpo o móvil.
- $\vec{x}_i$: representa el vector de posición inicial que tenía el móvil en el tiempo ti con respecto al sistema de referencia elegido.
- $\vec{x}_f$: representa el vector de posición final que tiene el móvil en el tiempo t_f con respecto al sistema de referencia elegido.

- t_i: representa el tiempo registrado, en el que el móvil se encuentra en su posición inicial, es decir, en el momento que se comienza a observar su movimiento.
- t_f: representa el tiempo registrado, en el que el móvil se encuentra en su posición final, es decir, el momento en el que se pide registrar la última posición del cuerpo.
- $\vec{x}_f - \vec{x}_i$: representa el vector de desplazamiento del cuerpo, llevado a cabo en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$.
- $t_f - t_i$: representa el intervalo de tiempo Δt, en el cual el cuerpo realiza el desplazamiento.

La Fig. 75 muestra un atleta que parte de la posición inicial x_i diferente al origen de coordenadas x = 0 en el tiempo $t_{i,}$ y se desplaza hasta la posición x_f en el tiempo t_f a velocidad constante $\vec{v}$.

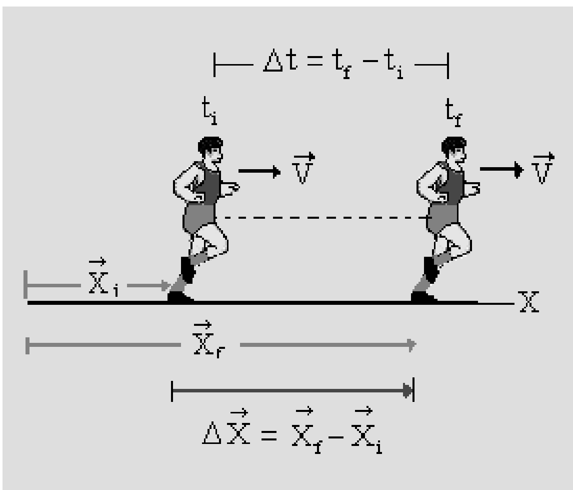


Figura 75. Atleta partiendo de un punto cualquiera x diferente al del origen del sistema de coordenadas (x = 0) con velocidad constante $\vec{v}$. Fuente: elaboración propia

De (61), la cual permite determinar la velocidad de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, y de [3], se puede concluir que la rapidez del cuerpo en cuestión se puede hallar para este caso en particular por medio de la expresión:

$$v = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \tag{62}$$

Es muy común que los diferentes autores de textos de física mecánica consideren que en el momento en que se empieza a observar y analizar el movimiento del cuerpo, este último se encuentra ubicado en el origen del sistema de coordenadas, esto con el fin de simplificar su estudio, tal como se muestra en la Fig. 76.

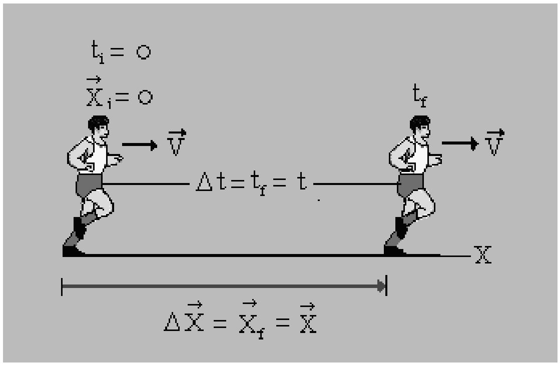


Figura 76. Atleta partiendo del origen de sistema de coordenadas con velocidad constante $\vec{v}$. Tanto el vector de posición inicial como el tiempo inicial se consideran 0 en el punto de partida en este caso. Fuente: elaboración propia

Es decir, cuando ti = 0 y $\vec{x}_i = 0$ y se considera, además, que $\vec{x}_f = \vec{x}$, y que $t_f = t$, de modo que queda (61), según [2], para la velocidad expresada de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{t} = \frac{x}{t}\hat{I} = V\hat{I} \tag{63}$$

Así, (63) representa la velocidad de un cuerpo que presenta un movimiento rectilíneo uniforme para el caso particular en el que este parte del origen del sistema de coordenadas. Además, la rapidez del cuerpo bajo estas condiciones, de acuerdo con [18], queda expresada por medio de la expresión:

$$v = \frac{x}{t} \tag{64}$$

Donde:

- V: representa la rapidez constante del cuerpo en dirección *x*.
- X: representa la distancia recorrida por el cuerpo en el tiempo *t*, medida esta desde el origen del sistema de coordenadas *x*.
- t: representa el tiempo empleado en recorrer la distancia *x* a velocidad constante.

Así, (63) y (64) representan la forma en que la mayoría de los autores de textos de física mecánica expresan la velocidad y la rapidez para el movimiento rectílineo uniforme de un móvil, es decir, de un cuerpo que se mueve a velocidad constante.

Ejemplo 19.

El atleta que se muestra en la Fig. 77, en el tiempo t = 0 s, se encuentra estacionado en el punto $P_{1,}$ el cual se encuentra situado a una distancia de 10 m respecto al origen del sistema de coordenadas. El corredor parte con velocidad constante hacia el punto P_2, el cual se encuentra a una distancia de 40 m, medido también desde el origen de coordenadas. El atleta emplea en llegar a este último punto un tiempo de t = 3 s. Calcule la velocidad uniforme del atleta y su rapidez.

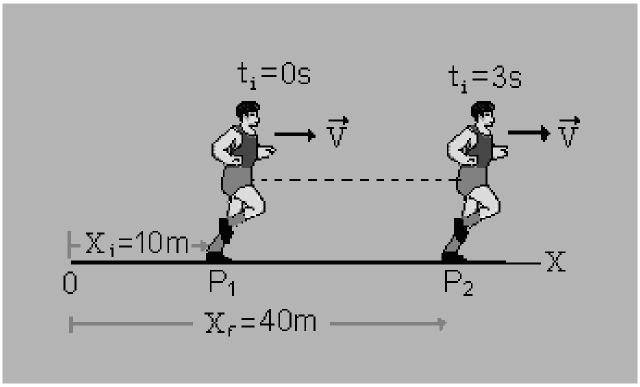


Figura 77. Atleta moviendose sobre el eje *x* positivo, el cual parte en el tiempo t = 0 s desde el punto p_1 ubicado con respecto al origen del sistema de coordenadas a una distancia de 10 m hacia el punto p_2 situado a una distancia de 40 m con respecto al origen. Este atleta emplea un tiempo de t = 3 s en llegar al segundo punto. Fuente: elaboración propia

Solución

De la Fig. 77 se deduce que los vectores de desplazamiento inicial y final en la dirección del eje *x* positivo para este caso quedan expresados de la siguiente manera:

$$\vec{x}_i = 10\text{m}\hat{I} \text{ y } \vec{x}_f = 40\text{m}\hat{I}$$

De igual manera, los valores de tiempo inicial y final quedan definidos así:

$$t_i = 0\text{s y } t_f = 3\text{s}$$

Al reemplazar en (61) los valores de tiempo, e igualmente los vectores de desplazamiento inicial y final se obtiene la velocidad uniforme del atleta:

$$\vec{v} = \frac{40\ m\hat{I} - 10m\hat{I}}{3s - 0s} = \frac{30\ m\hat{I}}{3s} 10m/s\hat{I}$$

Debido a que la rapidez del móvil es la magnitud de la velocidad, tenemos que la rapidez *v* del atleta esta dada por:

$$v = 10m/s$$

También, para calcular la rapidez del atleta se puede hacer uso de (62):

$$v = \frac{x_f - x_i}{x_f - x_i}$$

Donde:

$$x_i = 10m\ ;\ x_f = 40m\ ;\ t_i = 0s\ ;\ t_f = 3s$$

Al reemplazar los valores anteriores en (62) se obtiene la rapidez del atleta:

$$v = \frac{40\ m - 10m}{3s - 0s} = \frac{30m}{3s} = 10m/s$$

Ejemplo 20.

Un automovil que parte del origen de coordenadas, se aleja en la dirección *x* negativa una distancia de 240 km, en un tiempo de 2 h. Si el auto se mueve a velocidad constante, calcule su velocidad y rapidez (véase la Fig. 78).

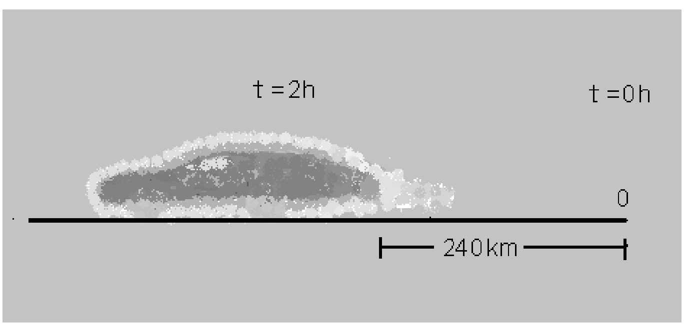


Figura 78. Auto alejandose del origen del sistema de coordenadas en la dirección *x* negativa a velocidad constante. En dos horas el auto que viaja a gran velocidad y recorre una distancia de 240 km. Fuente: elaboración propia

Solución

Dado que el auto parte del origen de sistema de coordenadas, para determinar su velocidad se hará uso de (63), es decir:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{t}$$

De la Fig. 78 tenemos:

$$\vec{x} = 240km(-\hat{I}) \text{ y } t=2h$$

Al reemplazar el valor de tiempo y el vector de desplazamiento en (63), se obtiene la velocidad uniforme del auto:

$$\vec{v} = \frac{240km(-\hat{I})}{2h} = 120Km/h\ (-\hat{I})$$

La rapidez del auto se deduce mediante (64), es decir:

$$v = \frac{x}{t}$$

Donde:

$$x = 240km \text{ y } t = 2h$$

Si se reemplazan los valores anteriores en (64) obtenemos la rapidez del auto:

$$v = \frac{240km}{2h} = 120Km/h$$

Se observa en los resultados anteriores de velocidad y rapidez del auto que la magnitud de la velocidad es igual a la rapidez obtenida.

Ejemplo 21.

Un camión parte del origen de coordenadas con velocidad constante $\vec{v} = 50m/s\hat{I}$. Calcule: a) la rapidez de movimiento del camión, b) ¿cuál es el desplazamiento del camión en t = 2 s, c) ¿cuál es el tiempo que emplea el camión cuando este se encuentra a una distancia de 100 m del origen de coordenadas (véase la Fig. 79).

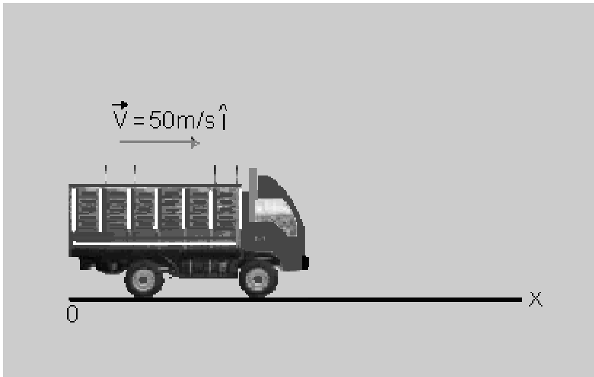


Figura 79. Camión partiendo del origen de coordenadas con velocidad $\vec{v} = 50m/s\hat{I}$.
Fuente: elaboración propia

Solución

a. Del enunciado del problema sabemos que la velocidad del camión esta dada por:

$$\vec{v} = 50m/s\hat{I}$$

Dado que la rapidez del camión es la magnitud del vector de velocidad, entoces su rapidez es de:

$$v = 50m/s$$

b. Al hacer uso de (63), se tiene que:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{t}$$

Al despejar de (63) la función de desplazamiento $\vec{x}$, donde *t* pasa a multiplicar a la velocidad, tenemos:

$$\vec{x} = \vec{v} \cdot t$$

Si se reemplaza en la expresión anterior el vector de velocidad del camión y el tiempo t = 8 s se obtiene:

$$\vec{x} = \left(50m/s\hat{I}\right) \cdot (8s)$$

Al realizar la multiplicación indicada y simplificar el término semejante en la ecuación anterior, se obtiene el vector de desplazamiento del camión en t = 8 s, es decir,

$$\vec{x} = 400m\hat{\imath}$$

c. Al tener presente (64), es decir:

$$v = \frac{x}{t}$$

Si se despeja la variable de tiempo *t* en la expresión anterior, tenemos:

$$t = \frac{x}{v}$$

Para este caso, tenemos que: x = 100 m y v = 50 m/s, si se reemplazan estos valores de distancia y rapidez en la ecuación de arriba, se obtiene el tiempo pedido, así:

$$t = \frac{100m}{50m/s} = 2s$$

2) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es un caso particular del movimiento uniformemente acelerado. De acuerdo con [27] y [28], en este tipo de movimiento la línea de acción de la aceleración del móvil, la cual debe ser constante y diferente de cero, se lleva a cabo en la misma dirección de la del desplazamiento, donde este último unicamente se realiza en una dimensión.

Para que el movimiento de un cuerpo en particular sea reconocido como un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, observables físicos como la trayectoria, el desplazamiento, la distancia recorrida, la aceleración, la velocidad y la rapidez deben presentar las siguientes características [1]:

- La trayectoria del cuerpo debe ser una línea recta.
- A intervalos de tiempos iguales el desplazamiento del cuerpo en movimiento debe ser diferente.
- A intervalos de tiempos iguales la distancia recorrida por el cuerpo en movimiento debe ser diferente.
- El vector de desplazamiento y el vector de aceleración no siempre tendrán la misma dirección.

- En instantes de tiempo diferente la magnitud de la velocidad instantánea del cuerpo en movimiento debe ser distinta, es decir, la rapidez del móvil debe variar en el tiempo siempre.
- El vector de aceleración siempre debe ser el mismo a medida que el tiempo transcurre. Esto quiere decir que su magnitud y su dirección no deben cambiar.

Según [2] y [40], las ecuaciones físico-matemáticas vectoriales que permiten resolver problemas de cuerpos que tienen movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y que se mueven sobre el eje *x* son las siguientes:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{\alpha}\, t \tag{65}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\, t^2 \tag{66}$$

$$2\vec{\alpha} \circ \left(\vec{x} - \vec{x}_0\right) = \vec{v}_f \circ \vec{v}_f - \vec{v}_0 \circ \vec{v}_0 \tag{67}$$

Donde:

- $\vec{x}$: representa el vector de posición final del cuerpo en cualquier instante de tiempo *t*, en la dirección *x*.
- $\vec{x}_0$: representa el vector de posición inicial que tiene el cuerpo en observación con respecto al sistema de referencia, en el tiempo ti. Este tiempo se refiere al momento en el que se comienza a observar el móvil.
- $\vec{\alpha}$: representa la aceleración constante que mantiene el cuerpo en su movimiento.
- $\vec{v}_0$: representa la velocidad inicial que tiene el cuerpo en el tiempo inicial $t_{i.}$
- $\vec{v}_f$: representa la velocidad final del cuerpo en el tiempo $t_{f.}$

Nota: se aclara que (67) se deduce de (65) y (66) por medio de procedimientos matemáticos básicos.

La Fig. 80 muestra un ciclista que parte de un punto diferente al origen del sistema de coordenadas (x = 0), con aceleración constante $\vec{\alpha}$.

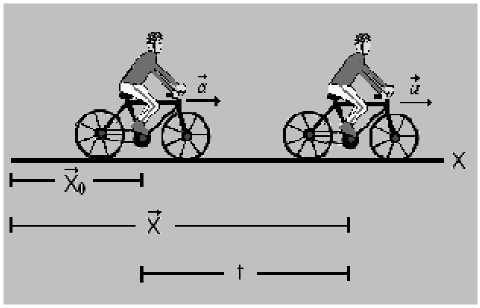


Figura 80. Ciclista partiendo de un punto *x* diferente de cero con aceleración constante $\vec{\alpha}$.
Fuente: elaboración propia

Por lo regular, en la literatura y, de acuerdo con [29], [30] y [31], las ecuaciones para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se expresan de forma escalar de la siguiente manera:

$$v_f = v_0 + \alpha t \tag{68}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{69}$$

$$2\alpha x = v_f^2 - v_0^2 \tag{70}$$

En este caso se considera que $x_0 = 0$ para $t = 0$, es decir, para el cuerpo ubicado en el origen del sistema de coordenadas. Además, aquí solo se tienen en cuenta las magnitudes de los observables físicos involucrados en las ecuaciones. Es decir, lo que se halla con las expresiones anteriores son las cantidades o valores de la velocidad, la aceleración y el vector de posición del móvil (véase la Fig. 81).

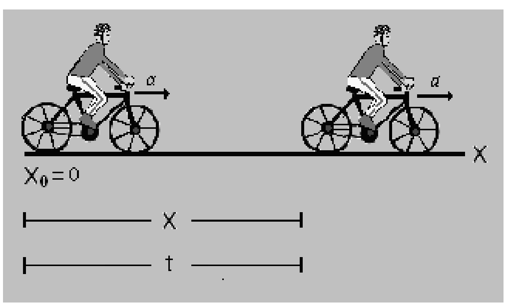


Figura 81. Ciclista partiendo del origen de coordenadas con magnitud de aceleración α, el cual recorre una distancia *x* en el tiempo *t. Fuente: elaboración propia*

Ejemplo 22.

Un auto parte del reposo con aceleración constante desde el origen de coordenadas en la dirección *x*. Si en el tiempo t = 4 s la magnitud de la velocidad del auto es de 30 m/s: a) ¿cuál es la aceleración del auto?, b) ¿cuál es el desplazamiento del auto con respecto al origen de coordenadas en el tiempo t = 4s? Véase la Fig. 82.

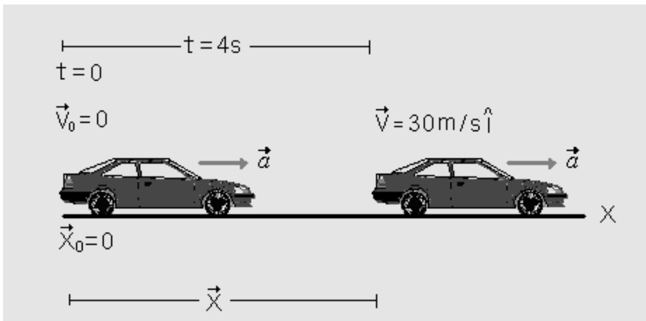


Figura 82. Auto inicialmente en reposo partiendo del origen de coordenadas *x* con aceleración constante $\vec{\alpha}$. Cuando ha transcurrido un tiempo t = 4 s la rapidez del auto es de v = 30 m/s. Fuente: elaboración propia

Solución

a. De la Fig. 82 se deduce que los observables físicos de tiempo y de velocidad quedan definidos de la siguiente manera:

$$t_i = 0s;\ t_f = 4s;\ \vec{v}_o = 0\ ;\ \vec{v}_f = 30m/s\hat{I}$$

Al tener presente (65), es decir:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{\alpha}t$$

Se deduce de la ecuación anterior al despejar la aceleración, que esta queda expresada de la siguiente manera:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{t}$$

Al reemplazar el valor de tiempo $\Delta t = t_f - t_i = t = 4s$, y los vectores de velocidad inicial y final en la expresión anterior de aceleración del auto, tenemos:

$$\vec{\alpha} = \frac{30m/s\hat{I} - 0m/s\hat{I}}{4s} = 7{,}5m/s^2\ \hat{I}$$

b. Para determinar el desplazamiento del auto para t = 4 s se hace uso de (66), es decir:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\, t^2$$

Donde:

$$\vec{x}_0 = 0 \ ; \ \vec{v}_0 = 0 \ ; \ t = 4s \quad \vec{\alpha} = 7{,}5 m/s^2 \hat{I}$$

Al reemplazar los valores anteriores de los observables físicos de desplazamiento inicial, velocidad inicial, tiempo y aceleración en (66), se tiene que:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\, t^2 = 0+0+\frac{1}{2}\ (7{,}5 m/s^2 \hat{I})(4s)^2$$

Si se desarrolla la potencia, la multiplicación y la división indicada en la expresión anterior se obtiene finalmente el desplazamiento del auto en t = 4 s, así:

$$\vec{x} = 60 m \hat{I}$$

El resultado anterior nos indica que el auto se encuentra a 60 m de distancia con respecto al origen de coordenadas para cuando ha transcurrido un tiempo de t = 4 s, y que además este se desplaza en dirección *x* positiva.

Ejemplo 23.

Un ciclista rezagado persigue al grupo principal que se dirige en dirección oeste hacia la meta. Esté último cruza un pequeño pueblo y con la intención de alcanzar a los que van adelante acelera en el momento que pasa un letrero, el cual señala el límite del pueblo. La magnitud de su aceleración es constante y tiene un valor de 5 m/s^2. Además, se conoce que en t = 0 s se encuentra a 6 m al oeste del letrero y presenta en este punto una rapidez de 30 m/s en la misma dirección de posición (véase la Fig. 83). De acuerdo con lo planteado, calcule: a) su velocidad y posición cuando a transcurrido un tiempo de t = 3 s, y b) ¿cuál es la posición del ciclista cuando se mueve en dirección oeste con una rapidez de 40 m/s?

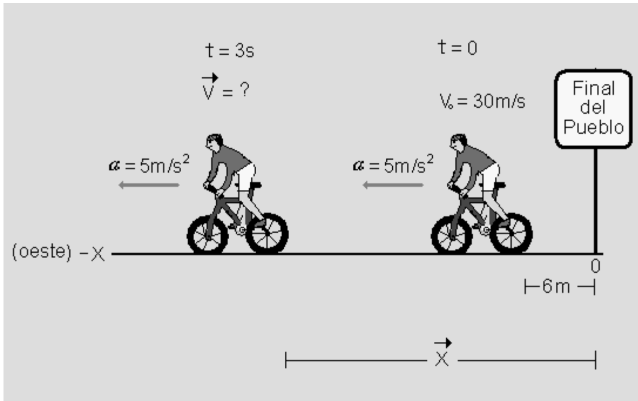


Figura 83. Ciclista persiguiendo al grupo principal de ciclista. Cuando t = 0 s, este presenta una distancia con respecto al origen de coordenadas de 6 m, una rapidez de 30 m/s y una magnitud de aceleración de 5 m/s^2. Fuente: elaboración propia

Solución

a. De la Fig. 83 se deducen los siguientes observables físicos:

$$\vec{x}_0 = 6m(-\hat{I})\ ;\ \vec{v}_0 = 30m/s(-\hat{I})\ ;\ \vec{\alpha} = 5m/s^2(-\hat{I}) : \text{en } t = 0s$$

Se procede inicialmente a determinar la velocidad y la posición del ciclista cuando a transcurrido un tiempo t = 3 s. Para hallar esta velocidad hacemos uso de (65), es decir:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{\alpha}\, t$$

Si se reemplazan en (65) el valor de tiempo y los términos equivalentes a la velocidad inicial y a la aceleración indicadas en la parte de arriba, tenemos:

$$\vec{v}_f = 30m/s(-\hat{I}) + \left[5m/s^2(-\hat{I})\right](3s)$$

Al realizar la multiplicación indicada en el corchete y simplificar términos semejantes se obtiene:

$$\vec{v}_f = 30m/s(-\hat{I}) + 15m/s(-\hat{I})$$

Al desarrollar la suma vectorial indicada en la parte de arriba se obtiene finalmente la velocidad del ciclista para t = 3 s:

$$\vec{v}_f = 45m/s(-\hat{I})$$

A fin de determinar la posición del ciclista en t = 3 s, se hace uso de (66), es decir:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\, t^2$$

Si se reemplazan en esta última ecuación los términos conocidos de posición inicial, velocidad inicial, aceleración y tiempo, tenemos que:

$$\vec{x} = 6m(-\hat{I}) + \left[30m/s(-\hat{I})\right](3s) + \frac{1}{2}\left[5m/s^2(-\hat{I})\right](3s)^2$$

Al realizar las multiplicaciones y potencias indicadas y simplificar términos semejantes en la expresión anterior, se obtiene:

$$\vec{x} = 6m(-\hat{I}) + 90m(-\hat{I}) + 22{,}5m(-\hat{I})$$

Al desarrollar la suma vectorial indicada en la parte de arriba se obtiene finalmente el vector de posición que tiene el ciclista con respecto al origen de coordenadas, a los tres segundos de su movimiento se obtiene:

$$\vec{x} = 118{,}5m(-\hat{I})$$

b. Para determinar la posición del ciclista cuando su rapidez v = 40 m/s se tiene en cuenta (70), es decir:

$$2\alpha x = v_f^2 - v_0^2$$

Con:

$$\alpha = 5m/s^2\ ;\ v_0 = 30m/s\ ;\ v_f = 40m/s$$

Al despejar *x* en (70) y reemplazar las magnitudes correspondientes de aceleración, rapidez inicial y final indicadas en la parte de arriba tenemos que:

$$x = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2\alpha} = \frac{(40m/s)^2 - (30m/s)^2}{2(5m/s^2)}$$

Si se realizan las potencias y las multiplicaciones indicadas en la expresión de arriba se llega a:

$$x = \frac{1600m^2/s^2 - 900m^2/s^2}{10m/s^2} = \frac{700m^2/s^2}{10m/s^2}$$

Al simplificar términos semejantes tenemos que:

$$x = 70m$$

Por tanto, la posición del ciclista medido desde el punto x = 6 m esta dada por:

$$\vec{x} = 70m(-\hat{I})$$

La posición final del ciclista con respecto al origen de coordenadas esta dada por la expresión vectorial:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_0$$

Con $\vec{x}_0 = 6m(-\hat{I})$ y $\vec{x}_1 = 70m(-\hat{I})$ tenemos que la posición del ciclista en el punto en el que tiene una rapidez de 40 m/s con respecto al origen de coordenadas es de:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 = \vec{x}_0 = 70m(-\hat{I}) + 6m(-\hat{I}) = 76m(-\hat{I})$$

Otra manera de llegar a la respuesta anterior del desplazamiento es hacer uso de (67), es decir:

$$2\vec{\alpha} \circ \left(\vec{x} - \vec{x}_0\right) = \vec{v}_f \circ \vec{v}_f - \vec{v}_0 \circ \vec{v}_0$$

Si se reemplazan en esta última ecuación los vectores:

$$\vec{\alpha} = 5m/s^2\,(-\hat{I})\ ;\ \vec{v}_0 = 30m/s(-\hat{I})\ ;\ \vec{v}_f = 40m/s(-\hat{I})\ ;\ x_0 = 6m(-\hat{I})\ ;\ \vec{x} = x(-\hat{I})$$

Tenemos que:

$$2\left[5m/s^2(-\hat{I})\right] \circ \left[x(-\hat{I}) - 6m(-\hat{I})\right] = \left[40m/s(-\hat{I})\right] \circ \left[40m/s(-\hat{I})\right] - \left[30m/s(-\hat{I})\right] \circ \left[30m/s(-\hat{I})\right]$$

Al aplicar la propiedad distributiva del producto punto en el miembro izquierdo de la igualdad de la expresión anterior, y realizar los productos indicados en su parte derecha, se obtiene:

$$10m/s^2\,x - 60m^2/s^2 = 1600m^2/s^2 - 900m^2/s^2$$

Si se despeja *x* en la ecuación anterior tenemos:

$$x = \frac{1600m^2/s^2 - 900m^2/s^2 + 60m^2/s^2}{10m/s^2}$$

Al realizar las operaciones de resta y suma indicadas en el numerador se obtiene:

$$x = \frac{760m^2/s^2}{10m/s^2} = 76m$$

Del resultado anterior se puede decir que el desplazamiento del ciclista es de:

$$\vec{x} = x(-\hat{I}) = 76m(-\hat{I})$$

Este último resultado concuerda con el hallado anteriormente, en el que se utilizó (70).

a) Plano inclinado

Un plano inclinado no es más que aquella superficie que forma un ángulo Θ con respecto a otra, cuya posición es horizontal. De acuerdo con [32], este plano forma un cierto ángulo con la fuerza (peso) que actua sobre cualquier cuerpo que descanse sobre su superficie, al ser inclinado sobre la horizontal, tal como se muestra en las figuras 84 y 85.

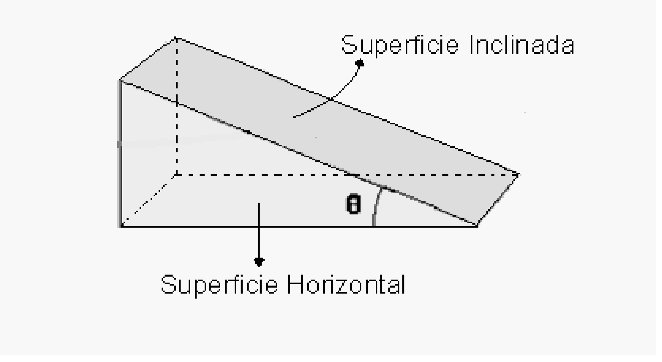


Figura 84. Plano inclinado tridimensional para el deslizamiento de cuerpos sobre su superficie inclinada. Fuente: elaboración propia

En un plano sin fricción, en su superficie inclinada y ubicado en el espacio vacío, siempre se llevará a cabo un movimiento rectilíneo con aceleración constante. Por ejemplo, en la Fig. 85 se muestra un cuerpo de masa *m* en la parte superior del plano con las fuerzas que actúan sobre él en todo instante de tiempo.

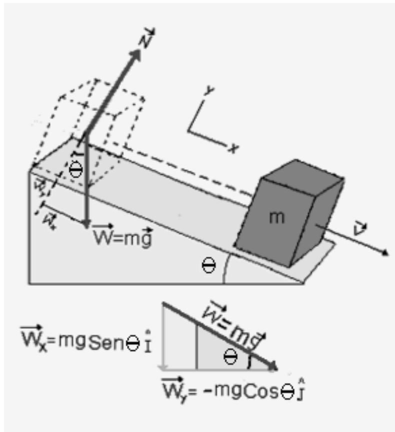


Figura 85. Cuerpo de masa *m* moviéndose a través de un plano inclinado sin fricción. En esta se muestran las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, las cuales son las causantes de su movimiento. Fuente: elaboración propia

Donde:

- m: representa la masa del cuerpo.
- $\vec{W}$: representa el peso del cuerpo de masa *m*.
- $\vec{W}_x$: representa la componente vectorial del peso en la dirección *x*.
- $\vec{W}_y$: representa la componente vectorial del peso en la dirección *y*.
- $\vec{N}$: representa la fuerza normal a la superficie.
- $\vec{v}$: representa la velocidad con la que desciende el cuerpo por el plano inclinado.

Se puede observar de la Fig. 85 que el movimiento del cuerpo solo se lleva acabo en la dirección del eje *x*, ya que las fuerzas en la dirección del eje *y* se anulan. Como se puede apreciar también sobre el eje *x* solo se aplica una fuerza sobre el cuerpo, la cual es la que causa que este se mueva en esta dirección. Esta fuerza en *x*, como se muestra en la Fig. 85, es la componente vectorial $\vec{w}_x$ de su peso $\vec{w}$.

De acuerdo con [32], las fuerzas $\vec{w}_x$ y $\vec{w}_y$, como se detalla en el diagrama de fuerzas de la Fig. 86, quedan expresada matemáticamente de la siguiente manera:

$$\vec{w}_x = mgsen\theta\hat{I} = m\vec{\alpha}_x \qquad (71)$$

$$\vec{N} = -\vec{w}_y = mgcos\theta\hat{J} \qquad (72)$$

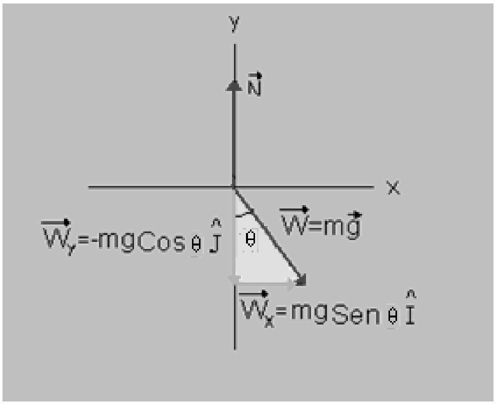


Figura 86. Diagrama de las componentes de la fuerza conocida como "peso del cuerpo". Fuente: elaboración propia

De (71) se deduce que la aceleración $\vec{\alpha}_x$ con la que se mueve el cuerpo en la dirección *x*, está dada por:

$$\vec{\alpha}_x = g\mathrm{sen}\Theta\hat{I} \tag{73}$$

En [1] se puede hallar (73) escrita de forma escalar. Además, podemos deducir en ella que esta componente de aceleración es constante, ya que tanto g como Θ —que son las magnitudes de las cuales depende— no varían en el tiempo. También se puede afirmar que el cuerpo mantiene siempre el sentido y la dirección de su movimiento sobre el eje *x* durante su caída.

Ejemplo 24.

En la parte más alta de un plano inclinado sin fricción y de 8 m de longitud, el cual forma un ángulo de elevación de 40^0 con la línea horizontal, se coloca un bloque de masa de 30 kg. Basado en la información anterior determine: a) la aceleración del bloque; b) la velocidad adquirida por el bloque al llegar al extremo inferior del plano inclinado si este parte del reposo desde la parte superior (véase la Fig. 87).

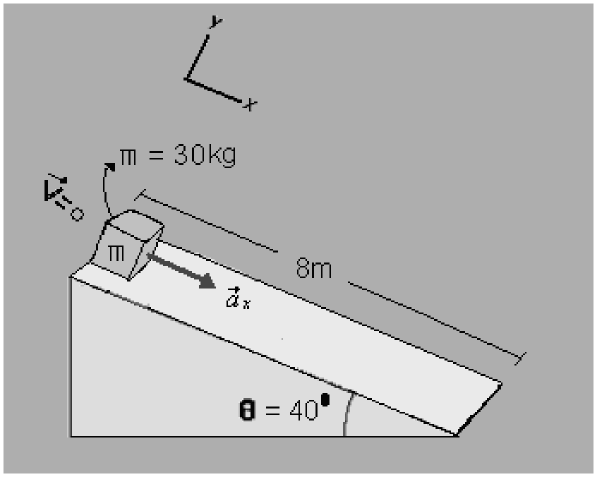


Figura 87. Bloque de masa m = 30 kg que se deja deslizar desde la parte más alta de un plano inclinado con velocidad inicial cero. El plano inclinado tiene una longitud de 8 m y presenta un ángulo de elevación de 40^0 respecto a la horizontal. Fuente: elaboración propia

Solución

En las figuras 85 y 86 se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa de 30 kg, así como el diagrama de fuerzas. Al aplicar la Segunda Ley de Newton para cuando la masa permanece constante en cada uno de los ejes *x* y *y*, se obtienen (71) y (72), respectivamente:

$$mg\,sen\Theta\hat{I} = m\vec{\alpha}_x$$

$$\vec{N} = mg\cos\Theta\,\hat{J}$$

Al cancelar la masa en (71) se obtiene la expresión para determinar la aceleración del cuerpo en la dirección *x*, así:

$$\vec{\alpha}_x = g\,sen\Theta\hat{I}$$

Si se reemplazan los valores de la gravedad y de ángulo Θ en la expresión anterior tenemos:

$$\vec{\alpha}_x = (9{,}8m/s^2)sen(40^0)\hat{I}$$

Al hallar el seno del ángulo de 40^0 y realizar la multiplicación correspondiente se llega a:

$$\vec{\alpha}_x = (9{,}8m/s^2)(0{,}642)\hat{I} = 6{,}30m/s^2\hat{I}$$

Es decir, la aceleración del bloque en la dirección *x* es de:

$$\vec{\alpha}_x = 6{,}30\text{m/s}^2\hat{\text{I}}$$

En la dirección del eje *y* el bloque no presenta aceleración, ya que sobre este eje no muestra movimiento alguno según lo que se observa en el sistema de coordenadas de la Fig. 87.

b) Para determinar la velocidad final con la que llega el bloque en el extremo inferior, del plano se tiene en cuenta (67), es decir:

$$2\vec{\alpha} \circ \left(\vec{x} - \vec{x}_0\right) = \vec{v}_f \circ \vec{v}_f - \vec{v}_0 \circ \vec{v}_0$$

En este caso tenemos que:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_x \ ; \ \vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} = 0 \ ; \ \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_x = 6{,}30\text{m/s}^2\hat{\text{I}} \ ; \ \vec{x} = 8\text{m}\hat{\text{I}}$$

Al reemplazar las diferentes expresiones anteriores en (67) se obtiene:

$$2 \ [\ (6{,}30\text{m/s}^2)\hat{\text{I}} \ ] \circ [8\text{m}(\hat{\text{I}}) - 0 \ ] = \vec{V}_x \circ \vec{V}_x \ - (0)\circ(0)$$

La ecuación anterior queda expresada así:

$$2\,[(6{,}30\text{m/s}^2)\hat{\text{I}}\,] \circ [8\text{m}(\hat{\text{I}})] = \vec{V}_x \circ \vec{V}_x$$

Si se realizan los productos punto expresados en la parte de arriba tenemos que:

$$V_x^2 = 100{,}8\text{m}^2/\text{s}^2$$

Al sacar raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad en la expresión anterior se obtiene, finalmente, la magnitud de la velocidad (rapidez) con la que llega el bloque al final del plano inclinado:

$$v_x = \sqrt{100{,}8\text{m}^2/\text{s}^2} = 10{,}04\text{m/s}$$

Del resultado anterior se concluye que la velocidad del bloque en el punto pedido es de:

$$\vec{v}_x = 10{,}04\text{m/s}\ \hat{\text{I}}$$

b) Plano inclinado con razonamiento

Ahora bien, cuando el plano inclinado se encuentra inmerso en el espacio vacío, pero su superficie tiene rozamiento, es necesario introducir en el diagrama de fuerzas del cuerpo la denominada “fuerza de fricción”: $\vec{F}_r$. De acuerdo con [33], esta última se opone al movimiento del móvil, y, por tanto, en su diagrama de fuerzas la fuerza de rozamiento se dibuja en la dirección contraria en el que se lleva a cabo su desplazamiento, tal como se muestra en la Fig. 88.

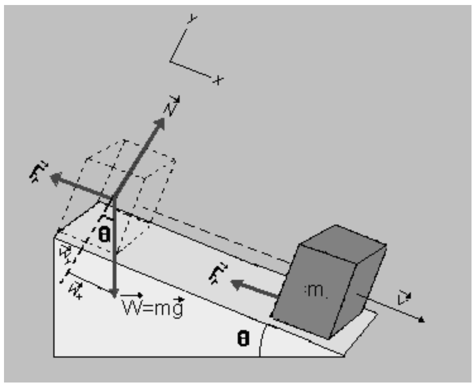


Figura 88. Diagrama de fuerzas en el que se muestran las componentes del peso y la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ que actúa sobre el cuerpo. Fuente: elaboración propia

En la Fig. 89 se muestra cómo queda el nuevo diagrama de fuerzas cuando actúa la llamada “fuerza de rozamiento” sobre un cuerpo que se desliza sobre un plano inclinado con fricción.

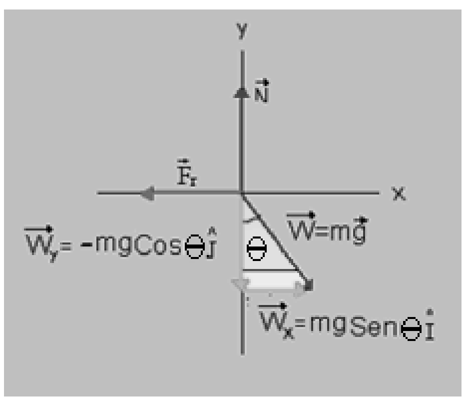


Figura 89. Diagrama de fuerzas de un cuerpo que se desliza sobre un plano inclinado cuando sobre el actúa la fuerza de rozamiento. Fuente: elaboración propia

Al realizar el análisis de fuerzas en la Fig. 89 se obtiene:

$$\vec{w}_r + \vec{F}_r = m\vec{\alpha}_x \tag{74}$$

$$\vec{N} = \vec{w}_y \text{ mgcos}\Theta\hat{J} \tag{75}$$

Ahora, como en [33], se expresa que la fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza normal, es decir, que está es igual al producto del escalar llamado "coeficiente de rozamiento cinético" y la fuerza normal. Lo anterior nos lleva a deducir que la magnitud de la fuerza de rozamiento se puede determinar al hacer uso de la expresión:

$$F_r = \mu N \tag{76}$$

Donde:

- Fr: representa la magnitud de la fuerza de rozamiento.
- μ: representa el coeficiente de rozamiento de la superficie.
- N: es la magnitud de la fuerza normal, la cual le aplica la superficie al bloque.

De (74) se deduce que la magnitud de la fuerza normal está dada por:

$$N = \text{mgcos}\theta \tag{77}$$

Al reemplazar (77) en (76) tenemos que la magnitud de la fuerza de rozamiento está dada por la expresión:

$$Fr = \mu\text{mgcos}\theta \tag{78}$$

Ahora, de la Fig. 89 y (78) se concluye que la fuerza de rozamiento queda definida de la siguiente manera:

$$\vec{F}_r = \mu\text{mgcos}\Theta(-\hat{I}) \tag{79}$$

Si se reemplaza (79) en (74) se obtiene la expresión:

$$\vec{W}_x + \mu\text{mgcos}\Theta\,(-\hat{I}) = m\vec{\alpha}_x$$

Al sustituir en la ecuación de arriba el término equivalente al vector de fuerza $\vec{W}_x$ expresado en la Fig. 89, tenemos:

$$\text{mgcos}\Theta\hat{\text{I}} + \mu\text{mgcos}\Theta\,(-\hat{\text{I}}) = m\vec{\alpha}_x$$

Al sacar factor común del lado derecho de la igualdad en la expresión anterior tenemos:

$$\text{mg}\,(\text{sen}\Theta - \mu\text{cos}\Theta)\hat{\text{I}} = m\vec{\alpha}_x$$

Si se simplifica m en la expresión anterior, obtenemos la ecuación que permite determinar la aceleración $\vec{\alpha}_x$ con la que se mueve el cuerpo en movimiento sobre el plano inclinado, la cual está dada por:

$$\vec{\alpha}_x = \text{g}(\text{sen}\Theta - \mu\text{cos}\Theta)\hat{\text{I}} \qquad (80)$$

Se le aclara al lector que el nombre y el valor del coeficiente de rozamiento depende de si el cuerpo está en reposo o en movimiento relativo de rotación o traslación con respecto a la superficie sobre la cual descansa. De acuerdo con [32], si el cuerpo se encuentra en reposo con respecto a la superficie se le denomina "coeficiente de rozamiento estático"; si se encuentra en movimiento, "coeficiente de rozamiento cinético"; y si rota con respecto a esta, "coeficiente de rozamiento de rotación". Cada uno de estos coeficientes de rozamiento se representan de la siguiente manera:

- μ_E: coeficiente de rozamiento estático.
- μ_C: coeficiente de rozamiento cinético.
- μ_R: coeficiente de rozamiento de rotación.

El coeficiente de rozamiento estático siempre es de mayor valor que el coeficiente de rozamiento cinético, y este último es mayor que el de rotación, es decir:

$$\mu_E > \mu_C > \mu_R$$

Ejemplo 25.

Un bloque de masa de 20 kg se desliza sobre la superficie de un plano inclinado partiendo desde su parte más alta. La superficie presenta un coeficiente de rozamiento cinético μ_C =0,4 y un ángulo de elevación de 60^0 con respecto a la línea horizontal, tal como se muestra en la Fig. 90. Si el bloque demora ocho segundos en llegar a la parte más baja del plano donde presenta una rapidez de 10 m/s, calcule: a) la aceleración del bloque y su magnitud; b) la velocidad inicial de deslizamiento del bloque; c) el desplazamiento total del bloque en la dirección de su movimiento (eje *x*).

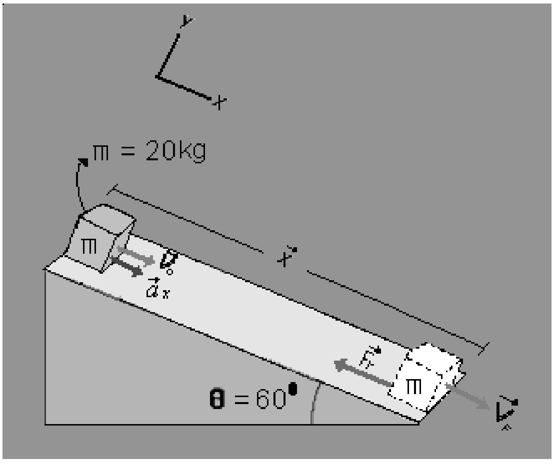


Figura 90. Bloque de masa m = 20 kg que se deja deslizar desde la parte más alta de un plano inclinado con una velocidad inicial diferente de cero. El plano inclinado presenta rozamiento y un ángulo de elevación con respecto a la línea horizontal de 60^0. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar la aceleración del bloque se utiliza (80), es decir:

$$\vec{a}_x = g(\text{sen}\Theta - \mu\cos\Theta)\hat{\imath}$$

Donde:

$$g = 9{,}8\text{m/s}^2;\ \Theta = 60^0\ ;\ \mu = \mu_c = 0{,}4$$

Al reemplazar los valores de los términos anteriores (80) tenemos:

$$\vec{a}_x = (9{,}8\text{m/s}^2)\left(\text{sen}60^0 - (0{,}4)\cos60^0\right)\hat{\imath}$$

Si se determinan los valores del seno y del coseno para $\Theta = 60^0$ se obtiene en la parte de arriba lo siguiente:

$$\vec{a}_x = (9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}86 - (0{,}4)(0{,}5))\,\hat{\imath}$$

Al realizar la multiplicación indicada en el segundo paréntesis se obtiene:

$$\vec{a}_x = (9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}86 - 0{,}2)\,\hat{\imath}$$

Al realizar la resta indicada en el segundo paréntesis tenemos:

$$\vec{\alpha}_x = (9{,}8\text{m/s}^2)\ (0{,}66)\ \hat{\text{I}}$$

Si se desarrolla la multiplicación indicada se obtiene que la aceleración del bloque en la dirección del eje *x* está dada por:

$$\vec{\alpha}_x = 6{,}468\text{m/s}^2\ \hat{\text{I}}$$

De la expresión de arriba se deduce que la magnitud de la aceleración del bloque es de:

$$\alpha_x = 6{,}468\text{m/s}^2$$

b. Mediante (65), es decir:

$$\vec{\text{v}}_\text{f} = \vec{\text{v}}_0 + \vec{\alpha}\text{t}$$

Donde:

$$\vec{\text{v}}_\text{x} = \vec{\text{v}}_\text{f} = 60\text{m/s}\ \hat{\text{I}}\ ;\ \vec{\alpha}_\text{x} = \vec{\alpha} = 6{,}468\text{m/s}^2\hat{\text{I}}\ ;\ \text{t} = 8\text{s}$$

Ahora, al reemplazar los valores anteriores en (65) se obtiene:

$$60\text{m/s}\ \hat{\text{I}} = \vec{\text{v}}_0 + (6{,}468\text{m/s}^2\hat{\text{I}})(8\text{s})$$

Si se realiza la multiplicación indicada en el miembro derecho de la igualdad en la expresión anterior y se simplifica el término semejante tenemos que:

$$60\text{m/s}\ \hat{\text{I}} = \vec{\text{v}}_0 + 51{,}744\text{m/s}\,\hat{\text{I}}$$

Al despejar $\vec{\text{v}}_0$ en la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{\text{v}}_0 = 60\text{m/s}\ \hat{\text{I}} - 51{,}744\text{m/s}\hat{\text{I}}$$

Al realizar la reducción de términos semejantes en la ecuación de arriba se obtiene la velocidad inicial con la que comienza a deslizarse el bloque:

$$\vec{\text{v}}_0 = 8{,}256\text{m/s}\ \hat{\text{I}}$$

c) Si se tiene presente (66), es decir:

$$\vec{\text{x}} = \vec{\text{x}}_0 + \vec{\text{v}}_0\text{t} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\,\text{t}^2$$

Donde:

$$\vec{x}_0 = 0 \;;\; v_0 = 8{,}256\text{m/s}\,\hat{\text{I}} \;;\; t = 8\text{s} \;;\; \vec{\alpha} = 6{,}468\text{m/s}^2\hat{\text{I}}$$

Al reemplazar los valores de los términos anteriores en (66), se obtiene:

$$\vec{x} = 0 + (8{,}256\text{m/s}\,\hat{\text{I}})(8\text{s}) + \frac{1}{2}(6{,}468\text{m/s}^2\hat{\text{I}})(8\text{s})^2$$

Si se realizan la primera multiplicación, se simplifican términos y se desarrollan la potencia indicada en la expresión anterior, tenemos que:

$$\vec{x} = 66{,}048\text{m}\hat{\text{I}} + \frac{1}{2}\,(6{,}468\text{m/s}^2\hat{\text{I}})(64\text{s}^2)$$

Al desarrollar el producto indicado en el numerador del segundo término de la expresión anterior y dividir este resultado entre dos, se obtiene:

$$\vec{x} = 66{,}048\text{m}\hat{\text{I}} + 206{,}976\text{m}\hat{\text{I}}$$

Si se realiza la suma vectorial indicada en esta última expresión se obtiene, finalmente, el desplazamiento total del bloque sobre la superficie inclinada, es decir, desde el punto más alto al punto más bajo del plano.

$$\vec{x} = 273{,}024\text{m}\hat{\text{I}}$$

b) Caída libre de un cuerpo

Todo cuerpo que se encuentre suspendido por encima de la superficie terrestre, sobre él actúa una fuerza que trata de atraerlo hacia el centro de la tierra. Si este cuerpo se desprende o libera premeditadamente en un instante cualquiera de su objeto de sujeción, garantizándose con esto, según [34], que solo la fuerza de gravedad en cercanía de la tierra se ejerce sobre él, de forma instantánea sufrirá una caída en picada hacia abajo (verticalmente), conocida como “caída libre”. De acuerdo con lo que se afirma en [35], esta fuerza de gravedad le genera al cuerpo una aceleración de magnitud constante llamada “aceleración de gravedad”, la cual no depende del sistema de referencia. Cuando se comenta que la gravedad es constante se está considerando un problema en el cual el cuerpo se encuentra suspendido sobre la superficie terrestre a una distancia infinitamente pequeña comparada con el diámetro de la tierra. El valor o magnitud del vector de aceleración gravedad es de $g = 9{,}8\text{ m/s}^2$, y se considera que esta siempre apunta hacia el centro de la tierra en dirección del eje *y* negativo (-*y*) del sistema de coordenadas cartesianas.

En sí, la característica principal de un cuerpo en caída libre es que su movimiento parte del reposo al aumentar de forma paulatina su velocidad a medida que se acerca a la superficie de la Tierra. Además, se considera que el cuerpo está ubicado en el espacio vacío, donde no actúa la resistencia del aire. En la Fig. 91 se muestra una persona que se lanza en caída libre desde el puente al río, el cual se encuentra debajo de sus pies.

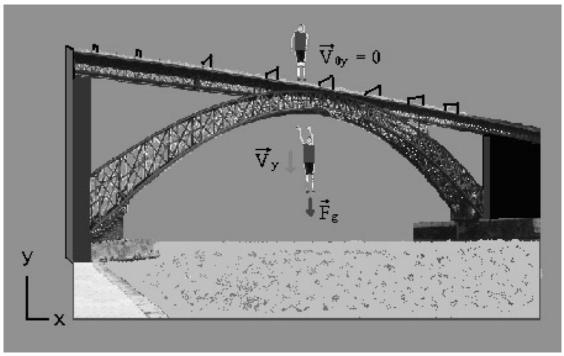


Figura 91. Persona lanzándose al vacío en caída libre desde un puente al río.
Fuente: elaboración propia

Dado que el movimiento en caída libre de un cuerpo se realiza a aceleración constante, entonces, de acuerdo con [36], y con (65), (66) y (67), las ecuaciones vectoriales generales de movimiento que permiten resolver problemas de cuerpos que caen libremente al vacío con este tipo de aceleración son las siguientes:

$$\vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} + \vec{g}t \tag{81}$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{82}$$

$$2\vec{g}\circ(\vec{h} - \vec{h}_0) = \vec{v}_{fy}\circ\vec{v}_{fy} - \vec{v}_{0y}\circ\vec{v}_{0y} \tag{83}$$

Donde:

- $\vec{v}_x = \vec{v}_{fy}$: es la velocidad final con la que llega el cuerpo sobre la superficie terrestre.
- $\vec{v}_{x0} = \vec{v}_{0y}$: es la velocidad inicial con la que empieza a caer el cuerpo hacia la superficie. terrestre.
- $\vec{a}_x = \vec{g}$: es el vector de aceleración de la gravedad con la que baja el cuerpo.
- t: es el tiempo empleado por el cuerpo en descender hasta la superficie terrestre.

- $\vec{x}_0 = \vec{h}_0$: es el vector posición de altura inicial a la que se encuentra el cuerpo con respecto a la superficie terrestre.
- $\vec{x} = \vec{h}$: es el vector posición de altura, en cualquier instante de tiempo que presenta el cuerpo con respecto a la superficie terrestre.

El hecho de que el cuerpo en caída libre parte de una velocidad inicial cero, es decir, $\vec{v}_{0y} = 0$, conlleva a que (81), (82) y (83), las cuales rigen el movimiento de cuerpos que caen en el vacío, queden expresadas de la siguiente manera:

$$\vec{v}_{fy} = \vec{g}t \tag{84}$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{85}$$

$$2\vec{g} \circ (\vec{h} - \vec{h}_0) = \vec{v}_{fy} \circ \vec{v}_{fy} \tag{86}$$

Por lo regular, en la literatura de libros de física mecánica las ecuaciones generales para el movimiento de cuerpos que caen en el vacío se encuentran expresadas de forma escalar de la siguiente manera:

$$v_{fy} = v_{0y} + gt \tag{87}$$

$$h = h_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} gt^2 \tag{88}$$

$$2g(h - h_0) = v_{fy}^2 - v_{oy}^2 \tag{89}$$

Ahora cuando el cuerpo cae libremente con rapidez inicial cero, es decir, $v_{0y} = 0$, las ecuaciones (87), (88) y (89) quedan expresadas como lo muestran (90), (91) y (92) de la siguiente forma:

$$v_{fy} = gt \tag{90}$$

$$h = h_0 + \frac{1}{2} gt^2 \tag{91}$$

$$2g(h - h_0) = v_{fy}^2 \tag{92}$$

En la determinación de estas últimas ecuaciones, además de considerar que el cuerpo desciende en caída libre, es decir, con rapidez inicial cero, también se debe tener presente que, por lo general, los autores de textos de física mecánica tienen en cuenta que el sistema de referencia desde el cual se realizan todas las mediciones está ubicado por encima de la superficie terrestre, lo cual no es tan necesario considerarlo en la solución de los problemas, tal como se verá más adelante.

Ejemplo 26.

Una persona sostiene una bolsa de basura en sus manos a una altura de 1,60 m con respecto al fondo del bote de color rojo que se encuentra en el piso con el fin de arrojarla en este: a) determine la velocidad con la que la bolsa impacta el fondo del bote de basura, y b) el tiempo que demora en obtener la velocidad calculada en el inciso a). Véase la Fig. 92.

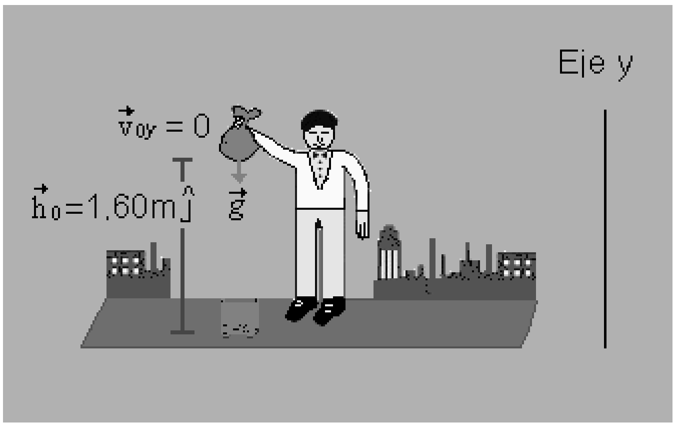


Figura 92. Persona dejando caer en caída libre una bolsa de basura en un bote que se encuentra a una altura de 1,60 m. En este caso la velocidad inicial de caida es igual a cero. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para dar solución al ejercicio se tendrá en cuenta (86), es decir:

$$2\vec{g} \circ (\vec{h}-\vec{h}_0) = \vec{v}_{fy} \circ \vec{v}_{fy}$$

Donde:

$$\vec{g}=9{,}8\text{m/s}^2(-\hat{j}) \ ; \ \vec{h}_0 = 1{,}60\text{m}\hat{j} \ ; \ \vec{h} = 0 \ ; \ \vec{v}_{fy} = v_{fy}(-\hat{j})$$

En este caso, el vector de posición final $\vec{h}$ se toma igual a cero en el fondo del bote donde se supone se encuentra el sistema de referencia. Ahora, al reemplazar los términos vectoriales anteriores en (86) tenemos:

$$\left[v_{fy}(-\hat{j})\right] \circ \left[v_{fy}(-\hat{j})\right] = 2\left[9{,}8\text{m/s}^2(-\hat{j})\right] \circ \left[0-1{,}60\text{m}(\hat{j})\right]$$

Al realizar los productos puntos indicados en la expresión anterior se obtiene:

$$v_{fy}^2 = 31{,}36 m^2/s^2$$

Si se saca raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad en la ecuación de arriba se obtiene la rapidez final con la que llega la bolsa de basura al fondo del bote, es decir:

$$v_{fy} = \sqrt{31{,}36 m^2/s^2} = 5{,}6 m/s$$

Dado que la bolsa de basura se dirige en la dirección del eje *y* negativo, se puede concluir que la velocidad final con la que impacta el fondo del bote es de:

$$\vec{v}_{fy} = 5{,}6 m/s(-\hat{J})$$

b. Para determinar el tiempo que demora la bolsa de basura en llegar al fondo del bote se hará uso de (89), es decir:

$$v_{fy} = gt$$

Donde:

$$v_{fy} = 5{,}6 m/s \; ; \; g = 9{,}8 m/s^2$$

Al despejar *t* en (89) y reemplazar los valores de rapidez final y de gravedad expresados en la parte de arriba tenemos:

$$t = \frac{v_{fy}}{g} = \frac{5{,}6 m/s}{9{,}8 m/s^2}$$

Si se realiza la división indicada y se simplifican términos semejantes en la expresión anterior se obtiene, finalmente, el tiempo que demora la bolsa de basura en llegar al fondo del bote, así:

$$t = 0{,}571 s$$

c) Lanzamiento vertical de un cuerpo hacia abajo

Cuando lanzamos un cuerpo de arriba hacia abajo, es decir, dirigido a la superficie terrestre, esto nos indica que este inicia la caída con una velocidad inicial diferente de cero. Cuando los cuerpos presentan este tipo de estado de movimiento se le conoce como "lanzamiento de cuerpo verticalmente hacia abajo". Las ecuaciones vectoriales que permiten resolver los problemas relacionados con este tema son las mismas utilizadas para cuerpos en caída libre en el vacío, en las que se tienen en cuenta las mismas condiciones físicas iniciales para ambos casos. Estas ecuaciones son la (81), (82) y la (83), expresadas anteriormente, es decir:

$$\vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} + \vec{g}t \ ; \ \vec{h} = \vec{h}_0 + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \ ; \ 2\vec{g} \circ (\vec{h} - \vec{h}_0) = \vec{v}_{fy} \circ \vec{v}_{fy} - \vec{v}_{0y} \circ \vec{v}_{0y}$$

Cabe resaltar que la única diferencia entre este tipo de movimiento y el de caída libre es que en el lanzamiento vertical de un cuerpo hacia abajo, el cuerpo parte su movimiento con velocidad diferente de cero, mientras que en el movimiento en caída libre no. Es decir, en este último tipo de movimiento la velocidad inicial es cero, como ya se había mencionado. Ejemplo de un cuerpo que se puede considerar que es lanzado hacia abajo es la caída de una pelota de baloncesto que previamente fue encestada; esta sale con una velocidad inicial diferente de cero de la cesta y, paulatinamente, aumenta su velocidad gracias a la fuerza de gravedad que actúa sobre ella, tal como se muestra en la Fig. 93.

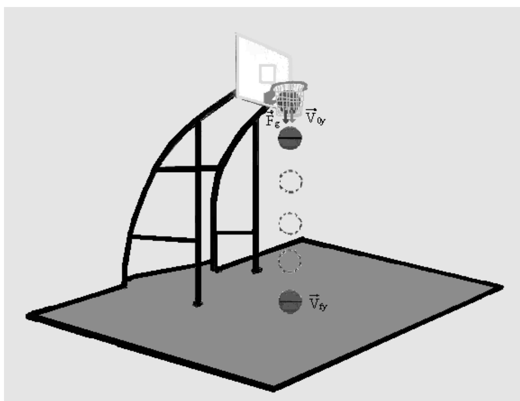


Figura 93. Pelota de baloncesto que cae después de haber sido encestada con velocidad inicial diferente de cero. Este caso se puede considerar como un problema de cuerpo lanzado hacia abajo. Fuente: elaboración propia

Encontramos, de igual manera, diversos ejemplos de cuerpos que presentan este tipo de movimiento, los cuales se tratan a continuación en los ejercicios de aplicación relacionados con el tema.

Ejemplo 27.

Un joven se prepara a lanzar una pelota desde la azotea de un edificio y la suelta en el momento en que su mano se encuentra a nivel de ésta, con una rapidez de 3 m/s. Si la pelota emplea un tiempo de 8 s en impactar el suelo, calcule: a) la velocidad de impacto de la pelota, y b) la altura del edificio (véase la Fig. 94).

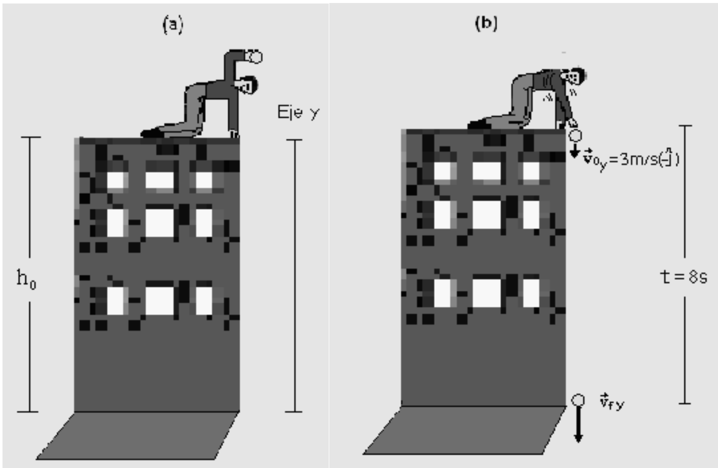


Figura 94. Joven preparandose para lanzar una pelota desde la azotea de un edificio (a) con una rapidez inicial v_{0y} = 3 m/s, la cual emplea un tiempo t = 8 s en impactar el suelo.
Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar la velocidad de impacto de la pelota con el piso se tendrá en cuenta (81), es decir:

$$\vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} + \vec{g}t$$

Donde:

$$\vec{v}_{0y} = 3m/s(-\hat{J})\ ;\ \vec{g} = 9{,}8m/s^2\ (-\hat{J});\ t = 8s$$

Al reemplazar los términos anteriores en (81), tenemos que:

$$\vec{v}_{fy} = 3m/s(-\hat{J}) + \left[9{,}8m/s^2(-\hat{J})\right](8s)$$

Al realizar la multiplicación del valor escalar de tiempo con el vector de aceleración de la gravedad y simplificar términos semejantes se obtiene:

$$\vec{v}_{fy} = 3m/s(-\hat{J}) + 78{,}4m/s(-\hat{J})$$

Si se suman los términos vectoriales semejantes en la expresión anterior se obtiene finalmente la velocidad final de impacto de la pelota con el piso:

$$\vec{v}_{fy} = 81{,}4m/s(-\hat{J})$$

b. Para determinar la altura del edificio se hace uso de (88):

$$h = h_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Donde:

$$h = 0 + v_{0y} = 3m/s \ ; \ g = 9,8m/s^2 \ ; \ t = 8s$$

Al reemplazar los términos anteriores en (88) tenemos que:

$$0 = h_0 + (3m/s)(8s) + \frac{1}{2}(9,8m/s^2)(8s)^2$$

Al despejar h_0, realizar la potencia, las multiplicaciones y simplificar términos semejantes en la expresión anterior se obtiene:

$$h_0 = -24m - \frac{627,2m}{2} = \frac{-48m - 627,2m}{2} = -337,6m$$

El hecho de que h_0, es decir, la altura del edificio, halla dado negativa significa que se midió de arriba hacia abajo pero su altura es de 337,6 m.

d) Lanzamiento vertical de un cuerpo hacia arriba

También para este caso el cuerpo sale disparado con una velocidad inicial diferente de cero, pero con la diferencia de que se dirige hacia arriba. Lo anterior lleva a afirmar que la velocidad inicial del cuerpo bajo esta condición se encuentra en la dirección contraria a la velocidad inicial para el tema de lanzamiento de cuerpos hacia abajo. Además, se vuelve a considerar que las condiciones físicas bajo las cuales se rige el desplazamiento del cuerpo en este tema son las mismas que las anteriores. Otro aspecto importante y que amerita un análisis es que el cuerpo, para este caso, disminuye de manera progresiva su velocidad a medida que sube, ya que la fuerza de gravedad que actúa sobre él está aplicada en sentido contrario a su desplazamiento, lo que retardaría paulatinamente su movimiento a medida que transcurre el tiempo. Esto último implica que habrá un instante de tiempo en que su velocidad se hace cero. Ahora, en el momento en que el cuerpo cese su movimiento hacia arriba, es decir, su velocidad final sea cero, y si se tiene presente que la fuerza de la gravedad actúa sobre él en cada instante de tiempo y en dirección a la superficie terrestre, este comenzará a caer en picada hacia abajo en caída libre.

Las ecuaciones matemáticas vectoriales que permiten resolver los problemas para este caso son las mismas que se utilizaron para el lanzamiento vertical de cuerpos hacia abajo, es decir (81), (82) y (83), las cuales se expresan a continuación:

$$\vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} + \vec{g}t \ ; \ \vec{h} = \vec{h}_0 + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \ ; \ 2\vec{g} \circ (\vec{h}-\vec{h}_0) = \vec{v}_{fy} \circ \vec{v}_{fy} - \vec{v}_{0y} \circ \vec{v}_{0y}$$

En la Fig. 95 se muestra un jugador de baloncesto lanzando una pelota hacia arriba con una velocidad inicial $\vec{v}_{0y}$ diferente de cero. Se observa también en ella la fuerza de gravedad que actúa sobre la bola durante todo su recorrido hacia arriba, en dirección contraria a su movimiento, hasta que su velocidad se hace cero; luego la pelota comenzará a bajar en caída libre gracias a su peso.

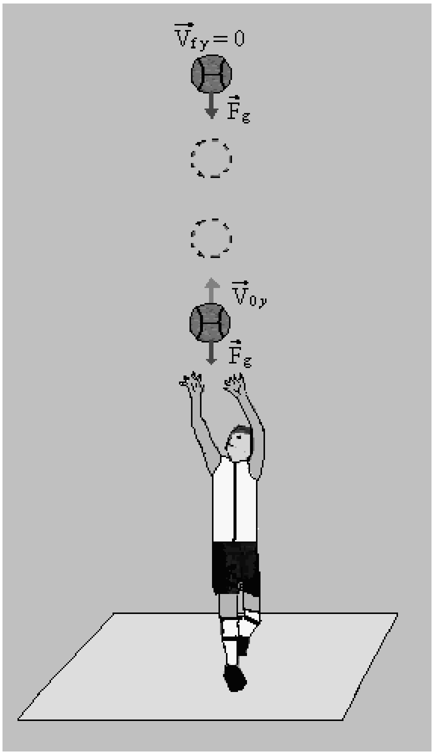


Figura 95. Lanzamiento de una pelota de baloncesto hacia arriba, en el que se muestra la fuerza de gravedad que actúa sobre ella durante todo su desplazamiento.
Fuente: elaboración propia

A continuación, se resuelven algunos ejercicios de aplicación con el fin de profundizar más en el tema.

Ejemplo 28.

Un niño dobla su torso con el fin de lanzar con su arco una flecha verticalmente hacia arriba, tal como se muestra en la Fig. 96. Si la flecha es disparada desde una altura de 1,50 m y con rapidez inicial de 20 m/s, calcule: a) el tiempo que emplea la flecha en llegar a su punto más alto; b) la posición de la flecha en su punto más alto; c) la velocidad y posición de la flecha cuando ha transcurrido un tiempo de 0,5 s desde el momento en que fue disparada.

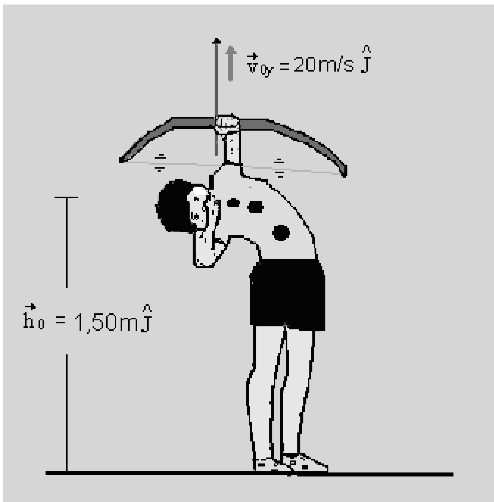


Figura 96. Niño lanzando una flecha hacia arriba verticalmente con una velocidad inicial $\vec{v}_{0y} = 20m/s\hat{J}$. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para dar respuesta a la pregunta se hace uso de (81):

$$\vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} + \vec{g}\,t$$

Donde en su punto más alto la velocidad de la flecha es igual a cero, es decir:

$$\vec{v}_{fy} = 0\text{, además } \vec{v}_{0y} = 20m/s\hat{J} \text{ y } \vec{g} = 9{,}8m/s^2(-\hat{J})$$

Al reemplazar los términos anteriores en (81) tenemos que:

$$0\hat{J} = 20m/s\hat{J} + \left[9{,}8m/s^2(-\hat{J})\right]t$$

La expresión anterior se puede escribir también de la siguiente forma al sacar el vector unitario $\hat{J}$ como factor común:

$$0\hat{J} = (20\text{m/s} - 9{,}8\text{m/s}^2\text{t})\hat{J}$$

Si se realiza una comparación vectorial en los dos miembros de la igualdad anterior se concluye que:

$$0 = 20\text{m/s} - 9{,}8\text{m/s}^2\text{t}$$

Al despejar *t* en la expresión anterior y simplificar términos semejantes se obtiene el valor del tiempo pedido, así:

$$\text{t}= \frac{20\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = 2{,}04\text{s}$$

O sea que en t = 2,04 s la flecha se encuentra en su punto máximo, y en esta posición su velocidad final es cero.

b. Para determinar el vector de posición de la flecha en su punto más alto se hace uso de (82), es decir:

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \vec{v}_{0y}\text{t} + \frac{1}{2}\vec{g}\text{t}^2$$

Donde:

$$\vec{h}_0 = 1{,}50\text{m}\hat{J}\ ;\ \vec{v}_{oy} = 20\text{m/s}\hat{J}\ ;\ \vec{g} = 9{,}8\text{m/s}^2\ (-\hat{J})\ ;\ \text{t} = 2{,}04\text{s}$$

Al reemplazar los valores de los términos anteriores en (82) tenemos:

$$\vec{h} = 1{,}50\text{m}\hat{J} + (20\text{m/s}\hat{J})(2{,}04\text{s}) + \frac{1}{2}\left[9{,}8\text{m/s}(-\hat{J})\right](2{,}04\text{s})^2$$

Si se realiza la potencia indicada en la parte derecha de la igualdad, las multiplicaciones correspondientes, y además se simplifican términos semejantes, se obtiene:

$$\vec{h} = 1{,}50\text{m}\hat{J} + 40{,}8\text{m}\hat{J} - 20{,}39\text{m}\hat{J}$$

Al sumar y restar los términos vectoriales semejantes, con el fin de reducirlos se encuentra finalmente el vector de posición de la flecha en su punto más alto donde su velocidad es igual a cero:

$$\vec{h} = 21{,}91\text{m}\hat{J}$$

c. Para determinar la velocidad y la posición de la flecha para t = 0,5 s se toman nuevamente (81) y (82), respectivamente, así:

$$\vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} + \vec{g}\,t$$

Al reemplazar los valores de velocidad inicial, gravedad y tiempo en la ecuación (81) se obtiene:

$$\vec{v}_{fy} = 20m/s\hat{j} + \left[9{,}8m/s^2\,(-\hat{j})\right](0{,}5s)$$

Si se realiza la multiplicación indicada en la parte derecha de la igualdad y se simplifican los términos semejantes en la expresión anterior tenemos que:

$$\vec{v}_{fy} = 20m/s\hat{j} - 4{,}9m/s\hat{j}$$

Al desarrollar la resta de vectores indicada en esta última expresión se obtiene la velocidad de la flecha en t = 0,5 s, es decir:

$$\vec{v}_{fy} = 15{,}1m/s\hat{j}$$

Para determinar su posición en el tiempo t = 0,5 s se hace uso de (82), es decir:

$$\vec{h} = \vec{h_0} + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\,\vec{g}t^2$$

Al reemplazar en (82) los valores de posición inicial, velocidad inicial, tiempo y gravedad se obtiene:

$$\vec{h} = 1{,}50m\hat{j} + (20m/s\hat{j})(0{,}5s) + \frac{1}{2}\left[9{,}8m/s^2(-\hat{j})\right](0{,}5s)^2$$

Al desarrollar la potencia, las multiplicaciones indicadas y simplificar términos semejantes en la expresión anterior se obtiene que:

$$\vec{h} = 1{,}50m\hat{j} + 10m\hat{j} - 1{,}225m\hat{j}$$

Si se realizan la suma y la resta de los términos vectoriales en esta última expresión se encuentra, finalmente, que la posición de la flecha en t = 0,5 s, es de:

$$\vec{h} = 10{,}275m\hat{j}$$

D. Movimiento en dos dimensiones o sobre un plano

No siempre el movimiento de los cuerpos en el mundo real se lleva a cabo en línea recta, es decir, que el móvil se mueva sobre un solo eje. Por esto, no se puede afirmar todas las veces que en un juego de fútbol el balón se moverá sobre el piso o en el aire describiendo una trayectoria lineal recta. Por lo regular, cuando la pelota es pateada por un jugador, se presenta que la trayectoria seguida por ella es una curva, bien sea que su movimiento se lleve a cabo sobre la superficie terrestre o en una superficie delimitada por el aire. Para ambos casos el balón al ser impulsado por el pie puede describir una línea curva en un plano perpendicular al arco de fútbol o al piso, respectivamente, dependiendo lo anterior del medio donde este se mueva. Además, cuando observamos en un parque de diversiones a una persona subida en la montaña rusa en funcionamiento, podemos decir que el movimiento que realiza es de tipo circular, ya que la trayectoria que describe es una circunferencia. Este último tipo de movimiento se lleva a cabo también en un plano.

Asimismo, podemos encontrar muchos ejemplos en nuestra vida cotidiana en los que los cuerpos presentan movimiento en dos dimensiones, o sea en un plano [17], [36], tal como se observa en la Fig. 97, en la que un niño se mueve en un tobogán inflable ubicado en el plano *xy*.

Figura 97. Niño moviéndose en un tobogán inflable ubicado en el plano *xy*.
Fuente: elaboración propia

Entre los ejemplos reales y más comunes de cuerpos que se mueven en un plano tenemos: el movimiento semiparabólico, el movimiento parabólico y el movimiento circular.

1) Movimiento semiparabólico

Este tipo de movimiento, llamado también en algunos textos de física mecánica "tiro horizontal", se presenta más que todo cuando el cuerpo se encuentra en un punto ubicado sobre la superficie terrestre. Esto quiere decir que éste presenta una posición o altura inicial *ho* diferente de cero con respecto al sistema de referencia ubicado sobre la Tierra, y desde su punto de ubicación inicial es disparado horizontalmente, es decir, en dirección paralela a la superficie terrestre que, por lo regular, se considera como eje *x*. Ahora, dado que la fuerza de gravedad actúa sobre el cuerpo y perpendicular a su movimiento, esta última hará que el cuerpo comience a desviarse hacia abajo (eje *y*), de modo que le crea un movimiento en esta dirección en caída libre, ya que en esta dirección el cuerpo sale con velocidad inicial cero, tal como se muestra en la Fig. 97.

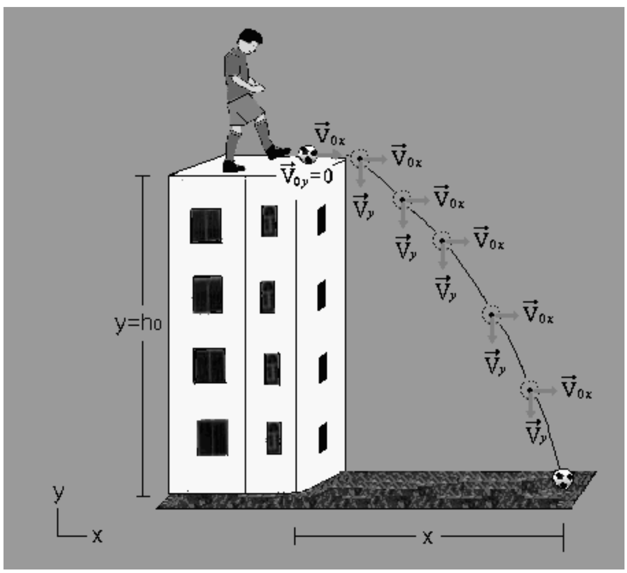


Figura 98. Lanzamiento horizontal de una pelota con velocidad constante $\vec{v}_{ox}$ en la dirección *x*. La pelota inicialmente no presenta velocidad sobre el eje *y*, pero la fuerza de gravedad, al actuar sobre ella, hace que comience a moverse en esta dirección generándole una velocidad casi en forma instantánea en dicha dirección. Fuente: elaboración propia

Al final, el cuerpo lleva a cabo un movimiento en dos dimensiones en el que la trayectoria descrita por su movimiento es una semiparábola. Una característica importante de este tipo de movimiento semiparabólico es que sobre los ejes en los que se traslada el cuerpo a medida que pasa el tiempo, este presenta un movimiento a velocidad constante y otro acelerado [36]. De acuerdo con [37], el movimiento que lleva el cuerpo a velocidad constante se da en la dirección en la que fue disparado o impulsado, ya que no hay fuerzas que actúan en esta dirección (eje *x*), y el movimiento acelerado lo presenta en la dirección de la fuerza de gravedad, la cual es la causante de producirselo (eje *y*), tal como se muestra en la Fig. 99.

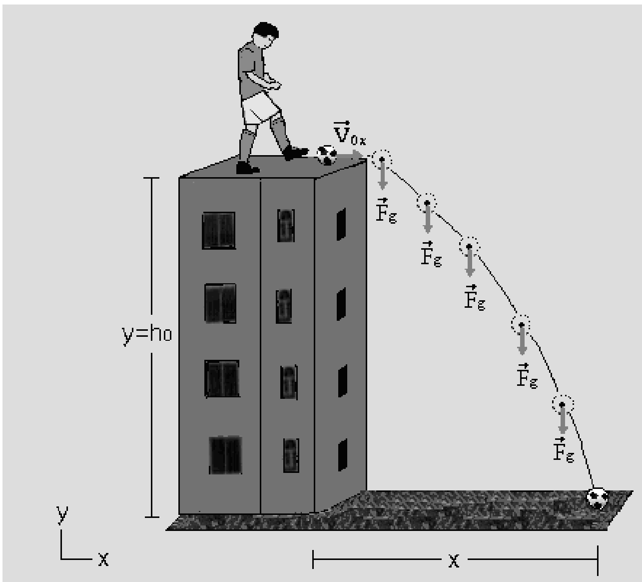


Figura 99. Fuerza de gravedad actuando sobre la pelota que fue lanzada horizontalmente. Y le crea así una aceleración en esta dirección (eje *y*) igual a la magnitud de la aceleración de gravedad g = 9, 8 m/s². Fuente: elaboración propia

La Fig. 99 nos permite deducir las ecuaciones vectoriales que permiten determinar los observables físicos de velocidad, desplazamiento y aceleración del cuerpo en cualquier instante de tiempo, las cuales son las que rigen de forma general el movimiento parabólico, que es un movimiento en dos dimensiones. Además, el hecho de que en las páginas anteriores de esta unidad se estudien los dos tipos de movimiento implicados en este tema de tiro horizontal, esto simplificará las cosas para hallar las ecuaciones que gobiernan este movimiento; estas son:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \tag{93}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = \vec{x} + \vec{y} \tag{94}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{g} \tag{95}$$

- Con (93), se puede determinar la velocidad con la que llega el objeto lanzado a la superficie terrestre, medida esta última desde el origen del sistema de coordenadas.
- Así, (94) permite determinar la posición que tiene el cuerpo en cualquier instante de tiempo, medida esta última desde el origen del sistema de coordenadas.
- Por su parte, (95) nos define que la aceleración del cuerpo en la dirección del eje y es igual a la aceleración de la gravedad. Según [2]:

$$\vec{g} = g(-\hat{j}) \text{ donde } g = 9{,}8\text{m/s}^2$$

Además, de acuerdo con [38], la única ecuación vectorial que rige el movimiento del cuerpo sobre el eje x está dada por:

$$\vec{r}_x = \vec{x} = \vec{v}_x \cdot t \tag{96}$$

Donde, $\vec{v}_x = v_{0x}\,\hat{i}$, además:

- $\vec{r}_x = \vec{x}$: representa el desplazamiento que sufre el cuerpo en la dirección del eje x, en el tiempo t.
- $\vec{v}_x = \vec{v}_{0x}$: representa la velocidad inicial con la que sale disparado el cuerpo en la dirección x, la cual es una constante de movimiento.
- t : representa el tiempo en el que se lleva a cabo el movimiento del cuerpo.

Según [38], las ecuaciones vectoriales generales que rigen el movimiento del cuerpo sobre el eje y, están dadas por:

$$\vec{v}_y = \vec{v}_{0y} + \vec{g}t \tag{97}$$

$$\vec{r}_y = \vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{98}$$

$$2\vec{g} \circ (\vec{y}-\vec{y}_0) = \vec{v}_y \circ \vec{v}_y - \vec{v}_{0y} \circ \vec{v}_{0y} \tag{99}$$

Donde:

- $\vec{v}_y$: representa la velocidad del cuerpo en la dirección del eje y, en cualquier instante de tiempo.
- $\vec{v}_{0y}$: representa la velocidad inicial con que sale disparado el cuerpo en la dirección del eje y.

- t: representa el tiempo en el que se lleva a cabo el movimiento del cuerpo.
- $\vec{r}_y = \vec{y}$: representa el vector de posición del cuerpo con respecto al origen de coordenadas en la dirección del eje *y*, en cualquier instante de tiempo.
- $\vec{g}$: es el vector de aceleración de la gravedad.

Para el caso del movimiento semiparabólico encontramos que la velocidad inicial del cuerpo en la dirección del eje *y* es cero (véase la Fig. 98), es decir:

$$\vec{v}_{0y} = 0$$

En particular para este caso, las ecuaciones vectoriales de movimiento para el eje *y* quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\vec{v}_y = \vec{g}t \tag{100}$$

$$\vec{r}_y = \vec{y} = \vec{y}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{101}$$

$$2\vec{g} \circ (\vec{y} - \vec{y}_0) = \vec{v}_y \circ \vec{v}_y \tag{102}$$

Si se reemplaza (100) en (93) resulta la ecuación:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{g}t$$

La ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{V} = V_x\hat{I} + \mathrm{gt}\,(-\hat{J}) = V_x\hat{I} - gt\hat{J} \tag{103}$$

Así, (103) nos permite determinar la velocidad general del cuerpo en movimiento semiparabólico en cualquier instante de tiempo.

Si reemplazamos ahora (96) y (101) en (94), se obtiene:

$$\vec{r} = (\vec{v}_x \cdot t) + (\vec{y}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}t^2)$$

Esta última ecuación se puede expresar de la siguiente forma:

$$\vec{r} = (v_x \cdot t)\hat{I} + (y_0 - \frac{1}{2}\vec{g}t^2)(\hat{J}) \tag{104}$$

Así, (104) permite determinar el vector de posición del cuerpo en movimiento semiparabólico en cualquier instante de tiempo. A continuación, se resuelven algunos ejercicios de aplicación referentes al tema.

Ejemplo 29.

Un joven que juega golf en la azotea de un edificio de 10 m de altura ubica la pelota en todo el borde del edificio, y con el palo le imprime una rapidez inicial de 2 m/s en la dirección del eje *x* positivo, tal como se ilustra en la Fig. 100. Calcule: a) el tiempo que demora la pelota en impactar el piso; b) la velocidad con la que la pelota impacta el piso; c) la distancia a la que se encuentra el punto de impacto de la pelota en el suelo con respecto a la base del edificio; d) la posición de la pelota en el tiempo t = 0,4 s después de haber sido golpeada e impulsada.

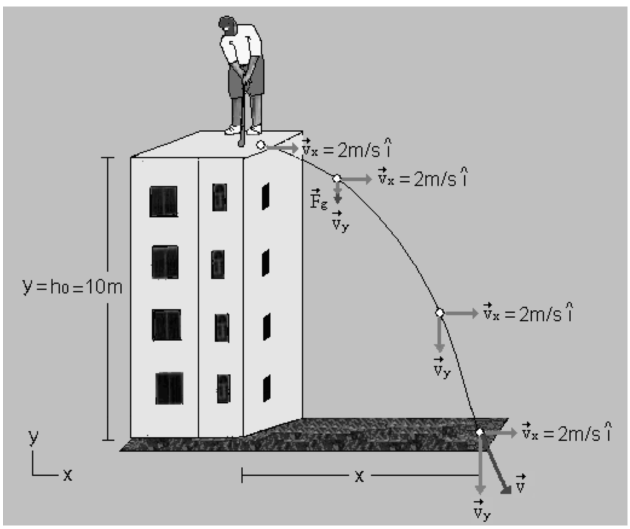


Figura 100. Un joven golpea una pelota de golf desde una azotea de un edificio con rapidez inicial de 2 m/s en dirección del eje *x* positivo. A medida que pasa el tiempo la pelota de golf va adquiriendo velocidad también en la dirección del eje *y*, debido a la acción de la fuerza de gravedad. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Mediante (98), con el fin de determinar el tiempo que emplea la pelota de golf en impactar el piso, es decir:

$$\vec{r}_y = \vec{y} = \vec{y}_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Donde:

$$\vec{r}_y = \vec{y} = 0 \text{ en el piso; } \vec{y}_0 = \vec{h}_0 = 10\text{m}\hat{J} \text{ ; } \vec{v}_{0y} = 0 \text{ ; } \vec{g} = 9{,}8\text{m/s}^2(-\hat{J})$$

Al reemplazar los valores anteriores en (98) de la parte de arriba tenemos:

$$0\hat{J} = 10\text{m}\hat{J} + (0)t + \frac{1}{2}\left[9{,}8\text{m/s}^2\,(-\hat{J})\right]t^2$$

Al agrupar términos en el lado derecho de la ecuación de arriba y sacar como factor común el vector unitario $\hat{J}$ se obtiene:

$$0\hat{J} = \left[10\text{m} - \left(\frac{9{,}8\text{m/s}^2}{2}\right)t^2\right]\hat{J}$$

Si se compara la igualdad vectorial anterior se llega a que:

$$0 = 10\text{m} - \left(\frac{9{,}8\text{m/s}^2}{2}\right)t^2$$

Al despejar *t* y realizar las operaciones correspondientes en la expresión anterior se obtiene que el valor de tiempo es de:

$$t = \sqrt{\frac{2(10\text{m})}{9{,}8\text{m/s}^2}} = \sqrt{\frac{20\text{m}}{9{,}8\text{m/s}^2}} = 1{,}428\text{s}$$

Es decir, la pelota demora 1,428 segundos en impactar el piso.

b. Ahora, con el fin de determinar la velocidad de impacto de la pelota con el piso se tendra en cuenta (103), es decir:

$$\vec{v} = v_x\hat{I} + gt\,(-\hat{J})$$

Donde,

$$\vec{v}_x = 2\text{m/s}\hat{I} \text{ ; } g = 9{,}8\text{m/s}^2 \text{ ; } t = 1{,}428\text{s}$$

Al reemplazar los valores anteriores en (103) tenemos:

$$\vec{v} = 2\text{m/s}\hat{I} + [(9{,}8\text{m/s})(1{,}428\text{s})](-\hat{J})$$

Si se realiza la multiplicación indicada en la componente $-\hat{J}$ en la expresión anterior, se obtiene la velocidad de impacto de la pelota contra el piso, así:

$$\vec{v} = 2\text{m/s}\hat{I} + 14\text{m/s}(-\hat{J})$$

c. Para determinar la distancia a la que se encuentra el punto de impacto de la pelota con respecto a la base del edificio se tiene en cuenta (96), es decir:

$$\vec{r}_x = \vec{x} = \vec{v}_x \cdot t$$

Donde:

$$\vec{v}_x = 2m/s\hat{I} \; ; \; t = 1{,}428 \text{ s}$$

Si se reemplazan los términos anteriores en (96) se halla el desplazamiento de la pelota de golf en la dirección del eje *x* a los 1,428 s, así:

$$\vec{x} = (2m/s\hat{I}) \cdot (1{,}428s) = 2{,}856m\hat{I}$$

De la expresión anterior se puede concluir que la distancia *x* a la que cae la pelota respecto a la base del edificio en el tiempo t = 1,428 s de haber sido lanzada es de:

$$x = 2{,}856m$$

d. Para responder esta pregunta nos remitimos a (104), la cual permite determinar el vector de posición de la pelota en cualquier instante de tiempo:

$$\vec{r} = (v_x \cdot t)\,\hat{I} + (y_0 - \frac{1}{2}gt^2)(\hat{J})$$

Con:

$$v_x = 2m/s \; ; \; t = 0{,}4s \; ; \; g = 9{,}8m/s^2 \; ; \; y_0 = h_0 = 10m$$

Al reemplazar los valores de los términos anteriores en (104) tenemos:

$$r = [(2m/s)(0{,}4s)]\hat{I} + \left[10m - \frac{1}{2}(9{,}8m/s^2)(0{,}4s)^2\right](\hat{J})$$

Si se realiza la multiplicación indicada en el primer corchete y se simplifican términos semejantes, y además se desarrolla la potencia indicada en el segundo corchete, se obtiene:

$$\vec{r} = 0{,}8m\hat{I} + \left[10m - \frac{1}{2}(9{,}8m/s^2)(0{,}16s^2)\right](\hat{J})$$

Al desarrollar las operaciones planteadas en el corchete de la expresión anterior se obtiene, finalmente, el vector de posición de la pelota a los t = 0,4 s de haber sido impulsada desde la azotea del edificio por el joven golfista, es decir:

$$\vec{r} = 0{,}8\text{m}\hat{\imath} + 9{,}216\text{m}\hat{\jmath}$$

El resultado anterior sugiere que a los 0,4 s la pelota en dirección *x* positiva ha recorrido una distancia de 0,8 m con respecto a su origen de coordenadas, y además presenta una altura de 9,216 m con respecto al origen de coordenadas del eje *y*. O sea que en este tiempo ha descendido una distancia de 0,784 m.

Ejemplo 30.

En la Fig. 101 se muestra un hombre moviendose sobre la cima de una montaña en una moto de nieve, con rapidez constante v_x = 4 m/s en dirección *x* positiva. Si el conductor al salir disparado del borde de la cima recorre una distancia horizontal de 12 m, medida esta última desde el punto base de partida, calcule: a) el tiempo de caída de la moto; b) la altura de la montaña; c) la velocidad final con la que llega la moto al suelo en la dirección del eje *y*; y d) la velocidad de impacto de la moto con el suelo.

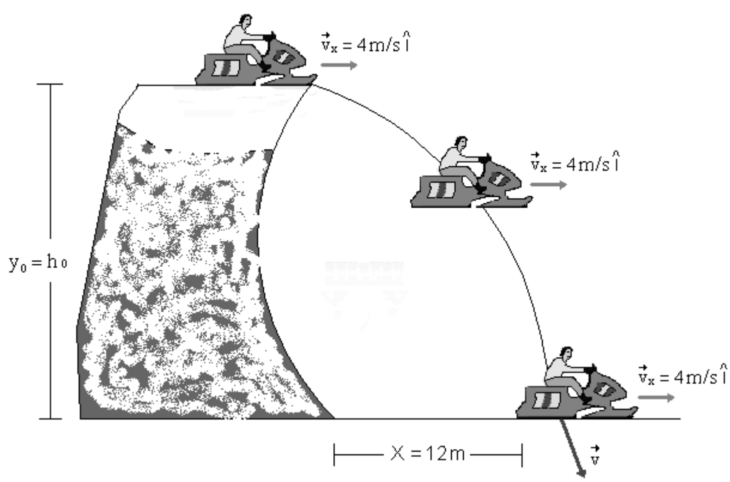


Figura 101. Hombre moviendose en una moto de nieve en la dirección *x* positiva a una rapidez v_x = 4 m/s. Este recorre una distancia x =12 m, medidos desde el punto base de partida hasta el punto de impacto con el suelo. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar el tiempo de caída de la moto se tiene en cuenta (96):

$$\vec{x} = \vec{v}_x \cdot t$$

Donde:

$$\vec{x} = 12m\hat{I} \; ; \; \vec{v}_x = 4m/s\hat{I}$$

Al reemplazar los términos anteriores en (96) tenemos:

$$12m\hat{I} = [(4m/s) \cdot t]\hat{I}$$

Si se compara la igualdad vectorial en la expresión anterior se llega a que:

$$12m = (4m/s) \cdot t$$

Al despejar *t* en la expresión anterior y simplificar términos semejantes se encuentra el valor pedido de tiempo:

$$t = \frac{12m}{4m/s} = 3s$$

b. Para determinar la altura de la montaña se hace uso de (98), es decir:

$$\vec{y} = \vec{y_0} + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Donde:

$$\vec{y} = 0 \text{ (en el tiempo t = 3 s)} \; ; \; \vec{y_0} = y_0\hat{J} \; ; \; \vec{v}_{0y} = 0 \; ; \; \vec{g} = 9{,}8m/s^2(-\hat{J}) \; ; \; t = 3s$$

Al reemplazar los valores anteriores en (98) organizando términos y aplicando la ley de los signos, tenemos:

$$0 = y_0\hat{J} - \frac{1}{2}\left[(9{,}8m/s^2)(3s)^2\right]\hat{J}$$

Si se transpone la componente vectorial del corchete para el lado izquierdo de la igualdad se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\left[(9{,}8m/s^2)(3s)^2\right]\hat{J} = y_0\hat{J}$$

Al comparar la igualdad vectorial anterior y realizar las operaciones indicadas en el corchete se encuentra:

$$44{,}1\text{m} = y_0$$

Dada $y_0 = h_0$, la cual es la altura de la montaña, se encuentra que esta tiene el valor $h_0 = 44{,}1$ m.

c. Para determinar la velocidad final con la que llega la moto de nieve a impactar el suelo en la dirección del eje *y*, se hace uso de la ecuación (99), es decir:

$$\vec{v}_y = \vec{g}t$$

Con:

$$\vec{g} = 9{,}8\text{m/s}^2\,(-\hat{J})\ ;\ t = 3\text{ s}$$

Al reemplazar los términos anteriores en (99) y simplificar términos semejantes, tenemos que:

$$\vec{v}_y = \left[9{,}8\text{m/s}^2(-\hat{J})\right](3\text{s}) = 29{,}4\text{m/s}(-\hat{J})$$

d. Para determinar la velocidad de impacto de la moto de nieve con el suelo se hace uso de la ecuación (93), es decir, $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.

Con:

$$\vec{v}_x = 4\text{m/s}\hat{I}\ ;\ \vec{v}_y = 29{,}4\text{ m/s}(-\hat{J})$$

Al reemplazar los términos vectoriales de arriba en (93) se encuentra que la velocidad de la moto de nieve al impactar el suelo esta dada por:

$$\vec{v} = 4\text{m/s}\hat{I} + 29{,}4\text{m/s}(-\hat{J})$$

2) Movimiento parabólico

Siempre que la trayectoria descrita por un cuerpo en movimiento sea una parábola se dice que su movimiento es de tipo parabólico, tal como se afirma en [36] y [38]. Este movimiento también conocido como "tiro oblicuo" o "movimiento de proyectil", se presenta, por lo regular, de acuerdo con [37], cuando el cuerpo es lanzado con un ángulo de inclinación θ respecto a una superficie horizontal. Es así como en nuestra vida cotidiana, con mucha frecuencia, lo presenciamos en varios de los deportes que nos llaman la atención como lo son el futbol, el lanzamiento de jabalina, el tiro de arco, el salto alto, el béisbol, etc. (véase la Fig. 102).

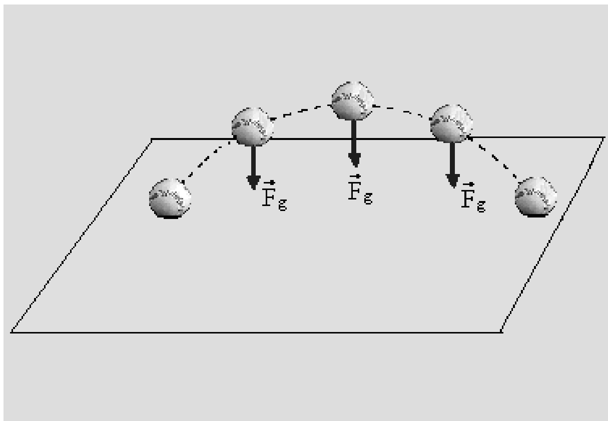


Figura 102. Pelota de béisbol moviéndose en una trayectoria parabólica. Fuente: elaboración propia

Otra característica del movimiento parabólico es que el vector de velocidad con que se lanza inicialmente el cuerpo forma el mismo ángulo θ diferente de cero con la línea o plano horizontal, además de mantenerse en todo tiempo tangente a la trayectoria parabólica (véase la Fig. 103).

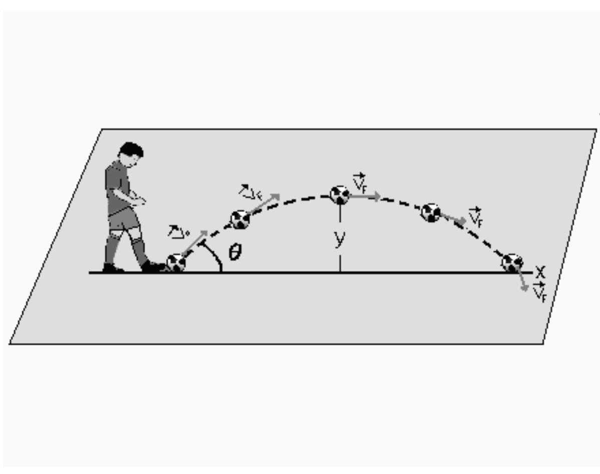


Figura 103. Velocidad tangencial a la trayectoria parabólica descrita por la pelota pateada por un jugador de futbol. Fuente: elaboración propia

En este tipo de movimiento se puede apreciar también que el vector de velocidad en cada instante de tiempo presenta variabilidad en su dirección (dependencia de la velocidad con el tiempo), mientras que la dirección del vector de la gravedad permanece constante (constancia de la gravedad con el tiempo) [36]. Se puede además afirmar que las direcciones de estos observables físicos son totalmente diferentes entre sí, tal como se muestra en la Fig. 104.

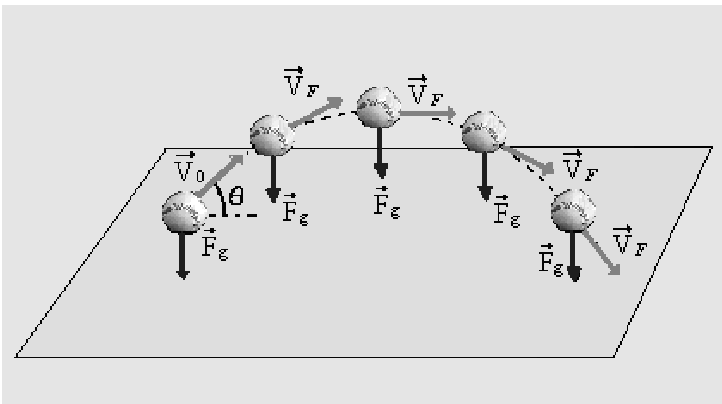


Figura 104. Pelota de béisbol describe una trayectoria parabólica en la que se muestra cómo la aceleración de gravedad y su velocidad no presentan la misma dirección (recuerde que la dirección de aceleración es la misma que la de la fuerza de gravedad).
Fuente: elaboración propia

Análogo al tiro semiparabólico visto se puede analizar el movimiento parabólico de un cuerpo, de acuerdo con [38], como dos movimientos rectilíneos totalmente independientes uno del otro, en el cual uno de ellos se realiza a velocidad constante en dirección horizontal (eje x), es decir, paralelo a la superficie terrestre, y el otro acelerado (caída libre) en la dirección vertical a la tierra (eje y), cuya aceleración es la de la gravedad, la cual, como ya es de conocimiento, se considera constante. La aceleración vertical que sufre el cuerpo en la dirección del eje y se debe a la fuerza de gravedad que ejerce la Tierra sobre todo objeto que se encuentre sobre su superficie. En la Fig. 105 se muestran las componentes de desplazamiento y de velocidad tanto horizontal como vertical de un balón que describe un movimiento de tipo parabólico.

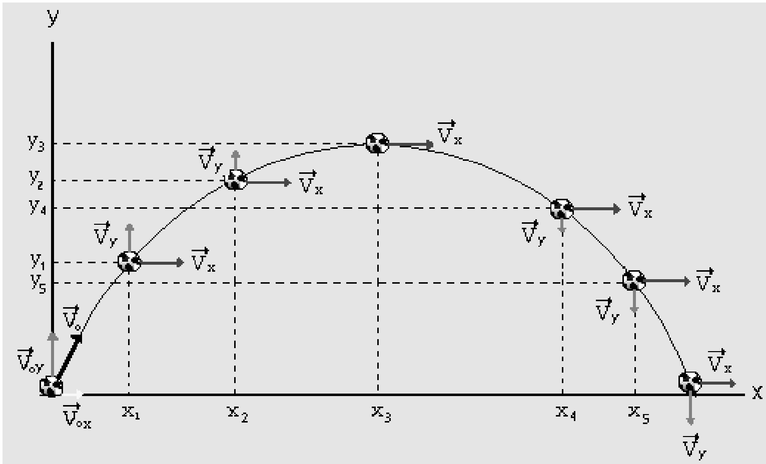


Figura 105. Componentes horizontal y vertical de la velocidad de un balón que tiene un movimiento de tipo parabólico. Se presentan, además, sus posiciones en cada uno de los ejes *x* y *y* a medida que transcurre el tiempo *t*. Fuente: elaboración propia

Las ecuaciones matemáticas vectoriales generales que rigen el movimiento de un cuerpo en tiro parabólico están integradas por las fórmulas correspondientes al movimiento rectilíneo uniforme para su movimiento horizontal sobre el eje *x*, y las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado para su movimiento vertical sobre el eje *y*. A continuación, de acuerdo con [38], se presentan las ecuaciones vectoriales que permiten determinar los desplazamientos y las velocidades sobre cada uno de los ejes coordenados de cualquier cuerpo con movimiento parabólico:

- Ecuación vectorial general a utilizar en la solución de ejercicios para el movimiento parabólico en la dirección del eje *x*:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_{0x} \cdot t \tag{105}$$

- Ecuaciones vectoriales generales a utilizar en la solución de ejercicios para el movimiento parabólico en la dirección del eje *y*:

$$\vec{v}_y = \vec{v}_{0y} + \vec{g}t \tag{106}$$

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{v}_{0y} \, . \, t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{107}$$

$$2\vec{g} \circ (\vec{y} - \vec{y}_0) = \vec{v}_y \circ \vec{v}_y - \vec{v}_{0y} \circ \vec{v}_{0y} \tag{108}$$

Dado que el cuerpo en este tipo de movimiento se lanza con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ y con un ángulo de tiro inicial θ_0 , de la Fig. 106 se pueden deducir las velocidades iniciales con las que sale disparado el cuerpo en la dirección del eje *x* y en la del eje *y*, en función de la magnitud de la velocidad inicial y del ángulo de disparo, las cuales, de acuerdo con [39], quedan expresadas de la siguiente manera:

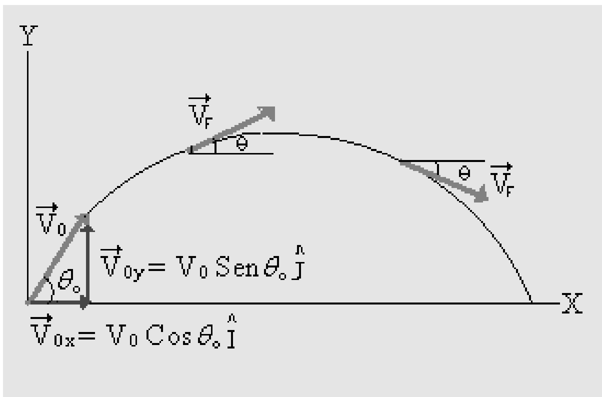


Figura 106. Componentes de la velocidad inicial con las que sale un cuerpo disparado, el cual presenta un movimiento de tipo parabólico. Se observa cómo están expresadas matemáticamente cada una de sus componentes. Fuente: elaboración propia

- Velocidad inicial con la que sale el cuerpo disparado en la dirección del eje *x*:

$$\vec{v}_{0x} = (v_0 \cos\theta_0)\hat{I} \tag{109}$$

- Velocidad inicial con la que sale disparado el cuerpo en la dirección del eje *y*:

$$\vec{v}_{0y} = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)\hat{J} \tag{110}$$

- Donde V_0 representa la magnitud del vector de velocidad inicial con la que sale disparado el cuerpo.

Ahora, al sustituir respectivamente las ecuaciones (109) y (110) en las ecuaciones (105), (106), (107) y (108) se obtienen las fórmulas matemáticas vectoriales generales a utilizar para la solución de los ejercicios de movimiento parabólico para los diferentes ejes, así:

- Determinación de la ecuación vectorial general para el eje *x*:

Al reemplazar la (109) en (105) se obtiene:

$$\vec{x} = x_0\hat{\imath} + [(v_0\cos\Theta_0)t]\hat{\imath}$$

Si se saca factor común $\hat{\imath}$ en la ecuación anterior se llega a:

$$\vec{x} = [x_0 + (v_0\cos\Theta_0)t]\hat{\imath} \tag{111}$$

- Determinación de las ecuaciones vectoriales generales para el eje *y*:

Al reemplazar (110) en (106) se obtiene:

$$\vec{v}_y = (v_0\operatorname{sen}\Theta_0)\hat{\jmath} + \vec{g}t$$

Si se sustituye $\vec{g}$ por $-g\hat{\jmath}$ en la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{v}_y = (v_0\operatorname{sen}\Theta_0)\hat{\jmath} - (gt)\hat{\jmath}$$

Al sacar factor común $\hat{\jmath}$ se obtiene finalmente que:

$$\vec{v}_y = [v_0\operatorname{sen}\Theta_0 - gt]\hat{\jmath} \tag{112}$$

Si se reemplaza (110) en (107) tenemos:

$$\vec{y} = y_0\hat{\jmath} + [(v_0\operatorname{sen}\Theta_0)t]\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Al sustituir $\vec{g}$ por $-g\,\hat{\jmath}$ en la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{y} = y_0\hat{\jmath} + [(v_0\operatorname{sen}\Theta_0)t]\hat{\jmath} - \left(\frac{1}{2}gt^2\right)\hat{\jmath}$$

Al sacar factor común $\hat{\jmath}$ en la expresión anterior se obtiene la ecuación requerida:

$$\vec{y} = \left[y_0 + (v_0\operatorname{sen}\Theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{\jmath} \tag{113}$$

Al reemplazar (110) y (112) en (108) obtenemos:

$$2\vec{g}\circ(\vec{y}-\vec{y}_0) = \left[(v_0\operatorname{sen}\Theta_0 - gt)\hat{\jmath}\right]\circ\left[(v_0\operatorname{sen}\Theta_0 - gt)\hat{\jmath}\right] - \left[(v_0\operatorname{sen}\Theta_0)\hat{\jmath}\right]\circ\left[(v_0\operatorname{sen}\Theta_0)\hat{\jmath}\right] \tag{114}$$

Ahora, al despejar el tiempo *t* en (111) y reemplazarlo en (113) se obtiene:

$$\vec{y} = \left[y_0 + (\tan\Theta_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}\left[\frac{g}{(v_0\cos\Theta_0)^2}\right](x-x_0)^2\right]\hat{\jmath} \tag{115}$$

Ahora, (111), (112), (113), (114) y (115) las encontramos expresadas en [2] de forma escalar, pero son ellas las expresiones o fórmulas matemáticas vectoriales generales utilizadas para resolver cualquier ejercicio de movimiento parabólico. Con estas podemos determinar el desplazamiento y las velocidades tanto iniciales como finales en cada uno de los ejes coordenados, al igual que el tiempo empleado de movimiento y el ángulo de disparo del cuerpo o proyectil lanzado oblicuamente.

Ahora, al sustituir (111) y (113) en (94), donde esta última está expresada por:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = \vec{x} + \vec{y}$$

De acuerdo con [40], se puede determinar el vector de posición general del cuerpo para este tipo de movimiento, cuando éste no parte del origen del sistema de coordenadas, por medio de la ecuación:

$$\vec{r} = [\, x_0 + (v_0\cos\Theta_0)t]\hat{\imath} + \left[y_0 + (v_0\operatorname{sen}\Theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{\jmath} \tag{116}$$

El vector general de desplazamiento $\vec{r}$ se puede expresar también de la siguiente manera:

$$\vec{r} = (x - x_0)\hat{\imath} + \left[y_0 + (\tan\Theta_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\left[\frac{g}{(v_0\cos\Theta_0)^2}\right](x - x_0)^2\right]\hat{\jmath} \tag{117}$$

Así, (117) surge de sustituir (115) por (113) en la (94).

La Fig. 107 muestra el vector de posición de un cuerpo que describe un movimiento de tipo parabólico cuando este parte del origen del sistema de coordenadas.

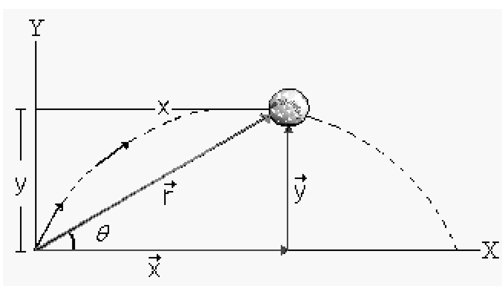


Figura 107. Vector de posición de un cuerpo que describe un movimiento de tipo parabólico, se observa que $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = \vec{x} + \vec{y}$. Fuente: elaboración propia

Como es de conocimiento, la magnitud r del vector de posición $\vec{r}$ del cuerpo se puede determinar por medio de la expresión matemática escalar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{118}$$

Donde,

- r: representa la distancia o magnitud del vector de desplazamiento del cuerpo.
- x: representa la componente escalar del vector de desplazamiento $\vec{x}$ del cuerpo.
- y: representa la componente escalar del vector de desplazamiento $\vec{y}$ del cuerpo.

En [40] se encuentran, además, las siguientes funciones escalares de posición para *x* y :

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)\, t \tag{119}$$

$$y = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{120}$$

$$y = y_0 + (\tan\theta_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\left[\frac{g}{(v_0 \cos\theta_0)^2}\right](x - x_0)^2 \tag{121}$$

Así, (119), (120) y (121) son las ecuaciones utilizadas comunmente para determinar las magnitudes de las componentes vectoriales del vector de posición del cuerpo con movimiento parabólico en los diferentes textos de física mecánica, cuando el objeto no parte del origen del sistema de coordenadas, es decir, cuando en t = 0, este presenta posiciones iniciales diferentes de cero ($x_0 \neq 0$ y $y_0 \neq 0$) tanto en dirección *x* como en dirección del eje *y*.

Cuando el cuerpo parte del origen de coordenadas, es decir cuando $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, entonces (119), (120) y (121), de acuerdo con [41], quedan expresadas de la siguiente manera:

$$x = (v_0 \cos\theta_0)t \tag{122}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{123}$$

$$y = (\tan\theta_0)\, x - \frac{1}{2}\left[\frac{g}{(v_0 \cos\theta_0)^2}\right] x^2 \tag{124}$$

Las ecuaciones escalares anteriores son las más comunes y utilizadas en los textos de física mecánica para la solución de problemas de tiro parabólico. Estas surgen al considerar que el cuerpo se lanza del origen del sistema de coordenadas. Ahora, de acuerdo con [42], el hecho de que el tiro parabólico sea bidimensional implica que la ecuación de velocidad general de un cuerpo que presente este tipo de movimiento debe estar expresada por medio de (93), es decir:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Al sustituir (109) y (112) en la ecuación anterior, tenemos que:

$$\vec{v} = (v_0 \cos\theta_0)\hat{i} + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt)\hat{j} \qquad (125)$$

Así, (125) permite determinar la velocidad del cuerpo en cualquier instante de tiempo cuando este describe un movimiento de tipo parabólico. En la Fig. 108 se muestran la velocidad y las componentes de velocidad de una pelota de béisbol que describe un movimiento de tipo parabólico, cuando esta parte del origen del sistema de coordenadas.

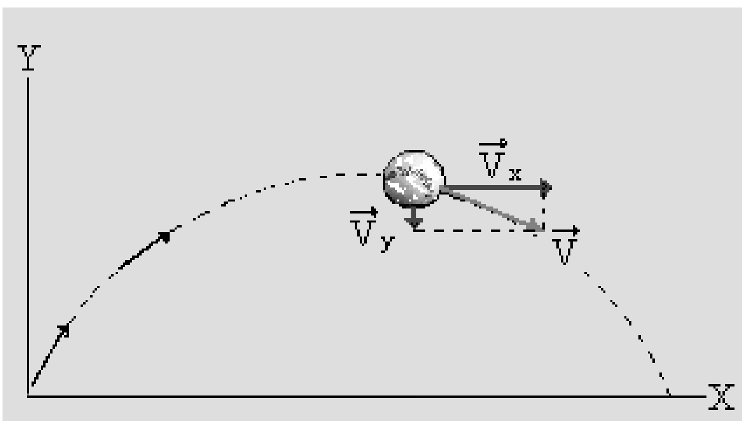


Figura 108. Velocidad y componentes de velocidad de una pelota de béisbol que describe un movimiento parabólico. Se considera que la pelota parte del origen de coordenadas. Fuente: elaboración propia

La magnitud del vector de velocidad del cuerpo (rapidez) se determina por medio de la expresión matemática:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (126)$$

Donde:

- v: representa la magnitud del vector de velocidad general del cuerpo.
- v_x: representa la magnitud de la componente del vector de velocidad del cuerpo en la dirección del eje *x*.
- v_y: representa la magnitud de la componente del vector de velocidad del cuerpo en la dirección del eje *y*.

De acuerdo con [41] y [43], se deduce que las componentes de magnitud de velocidad del cuerpo en cualquier instante de tiempo tanto en el eje *x* como en el eje *y* estan dadas por:

$$v_x = v_0 \cos\Theta_0 \tag{127}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\Theta_0 - gt \tag{128}$$

Las ecuaciones (127) y (128) son las que aparecen en los diferentes textos de física mecánica para determinar la rapidez que presenta el cuerpo con movimiento parabólico en las direcciones *x* y *y*, respectivamente, en cualquier instante de tiempo.

a) Tiempo de subida de un cuerpo en el movimiento parabólico

Desde el punto de vista físico, el tiempo de subida de un cuerpo que describe un movimiento de tipo parabólico es el que este emplea en alcanzar su máxima altura. Este tiempo se mide desde el punto de partida del cuerpo hasta el punto en el que alcanza su máxima altura. Esta última se mide desde la línea nivel (véase la Fig. 109).

La expresión matemática escalar que nos permite determinar el tiempo de subida de un cuerpo se obtiene al tener en cuenta que su rapidez final, cuando alcanza su máxima altura, es cero ($v_y = 0$). Al tener en cuenta el análisis anterior, (125) queda expresada de la siguiente manera:

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\Theta_0 - gt_s$$

Al despejar t_s en la expresión anterior y, de acuerdo con [39] y [41], la ecuación que define el tiempo de subida del proyectil está dada por:

$$t_s = \frac{v_0 \operatorname{sen}\Theta_0}{g} \tag{129}$$

Donde t_s en (129), representar el tiempo de subida, y es así como con esta ecuación se puede determinar su valor.

b) Tiempo de vuelo de un cuerpo en el movimiento parabólico

Desde la perspectiva de la física, el tiempo de vuelo de un cuerpo que describe un movimiento de tipo parabólico es aquel tiempo que transcurre desde el momento en que este se lanza hasta que nuevamente llega a su punto de partida o línea nivel. A la línea nivel deben pertenecer tanto el punto de partida como el de llegada del cuerpo (véase la Fig. 109).

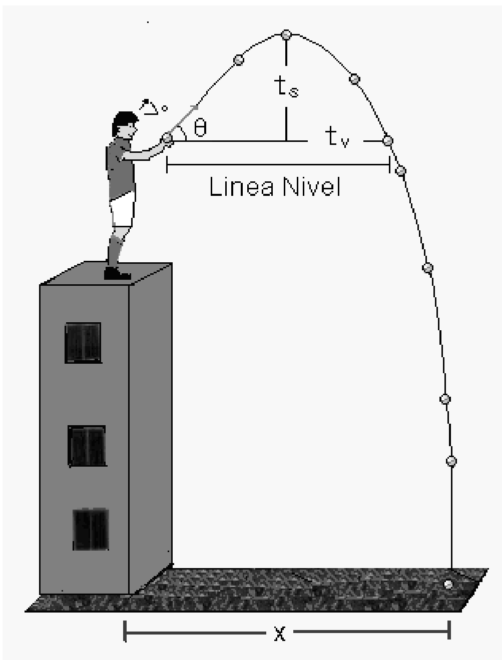


Figura 109. Se muestra en la gráfica la línea nivel, y se indica el tiempo de subida y de vuelo de una pelota lanzada por una persona desde la azotea de un edificio. Fuente: elaboración propia

Bajo las condiciones físicas especiales (vacío) en las que ocurre el movimiento parabólico, se considera que el tiempo de vuelo es de doble valor que el tiempo de llegada [39] y [41]. Es decir:

$$t_v = 2t_s$$

Ahora, si se tiene presente lo dicho en la parte de arriba, la expresión matemática escalar, según [39] y [41], que nos permite determinar el valor del tiempo de vuelo para un cuerpo que describe un movimiento de tipo parabólico está dada por:

$$t_v = \frac{2v_0 sen\theta_0}{g} \tag{130}$$

c) Alcance horizontal máximo en el movimiento parabólico

En el movimiento parabólico se considera como alcance horizontal máximo la magnitud del vector de desplazamiento del cuerpo que se define desde su punto de partida hasta su punto de llegada, localizados estos dos puntos sobre la línea nivel o eje *x*. Para hallar la expresión matemática que define el alcance horizontal máximo se reemplaza (130) en (122). Esta última expresión permite determinar la magnitud del vector de desplazamiento del móvil en la dirección del eje *x* en cualquier instante de tiempo, es decir:

$$x = (v_0 cos\theta_0)t$$

Ahora, cuando $t = t_v$, se tiene que X = Xmax, al realizar las sustituciones anunciadas en la parte de arriba en la expresión anterior tenemos:

$$x_{max} = (v_0 cos\theta_0)\left(\frac{2v_0 sen\theta_0}{g}\right)$$

La expresión anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g}(2sen\theta_0 cos\theta_0)$$

Si se sustituye la identidad trigonómetrica $2sen\theta_0 cos\theta_0 = sen(2\theta_0)$ en la expresión anterior se obtiene, finalmente, la ecuación que permite determinar la distancia máxima recorrida por el cuerpo en movimiento parabólico en dirección *x*. Según [39] y [41], esta queda expresada así:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 sen(2\theta_0)}{g} \tag{131}$$

d) Alcance vertical máximo en el movimiento parabólico

En el movimiento parabólico se considera como alcance vertical máximo la magnitud del vector de desplazamiento del cuerpo determinado en la dirección del eje *y*, el cual se define desde el punto de partida del móvil hasta el punto donde registra su máxima altura. Ahora, para determinar la expresión matemática que nos permite determinar el alcance vertical máximo del cuerpo se reemplaza (129) en (123), es decir:

$$y = (v_0 sen\Theta_0)t - \frac{1}{2} gt^2$$

Ahora, cuando $t = t_s$, se tiene que y = ymax, si se realizan las sustituciones correspondientes en la expresión anterior tenemos que:

$$y_{max} = (v_0 sen\Theta_0)\left(\frac{v_0 sen\Theta_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 sen\Theta_0}{g}\right)^2$$

Al desarrollar las multiplicaciones y las potencias indicadas, y se simplifican términos semejantes, se obtiene:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 sen^2\Theta_0}{g} - \frac{v_0^2 sen^2\Theta_0}{2g}$$

Al realizar la resta de términos indicada en la expresión anterior se obtiene la expresión matemática escalar que permite determinar el alcance máximo vertical. Según [39] y [41], queda expresada así:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 sen^2\Theta_0}{2g} \qquad (132)$$

Ejemplo 31.

Una persona lanza desde la azotea de un edificio una pelota de béisbol hacia arriba con un ángulo de disparo de 35º respecto a la línea horizontal, con una rapidez inicial de 30 m/s como se muestra en la Fig. 110. Si la altura comprendida entre la planta de los pies de la persona y el punto desde el cual este lanza la pelota es de 1,60 m, y la altura del edificio es de 50 m, determine: a) ¿cuál es el tiempo de vuelo de la pelota?, b) ¿cuál es su alcance horizontal máximo?, c) ¿cuál es la altura máxima que alcanza la pelota con respecto al punto desde el cual fue lanzada?, d) ¿cuál es el tiempo empleado por la pelota para ir desde su punto inicial de lanzamiento hasta su altura máxima?, e) ¿cuál es el tiempo que emplea la pelota en llegar al piso?, f) ¿cuál es la velocidad de impacto de la pelota con el piso?, g) ¿cuál es la distancia entre el punto de impacto de la pelota con el piso y la base del edificio?, y h) determine el vector de posición de la pelota en t = 2,5 s.

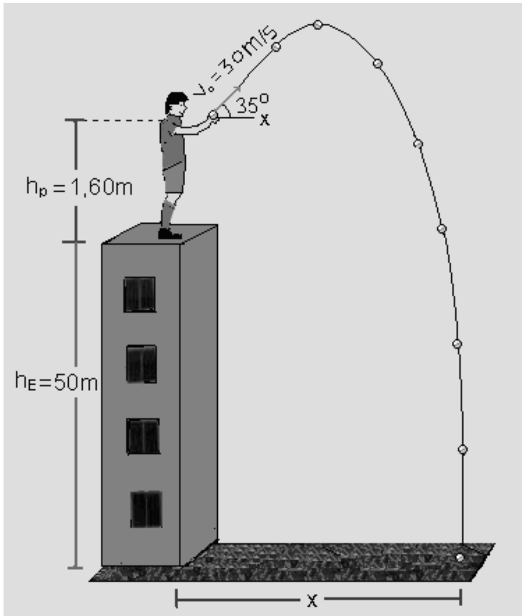


Figura 110. Persona lanza desde la azotea de un edificio una pelota de béisbol con una rapidez inicial neta de 30 m/s y con un ángulo de disparo de 35º respecto a la línea horizontal. La pelota describe en su movimiento una trayectoria de tipo parabólica.
Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para dar repuesta a esta pregunta hacemos uso de (130), la cual nos permite determinar el tiempo de vuelo de un cuerpo con movimiento parabólico:

$$t_v = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}$$

Donde:

$$v_0 = 30\text{m/s} \ ; \ \Theta_0 = 35º ; g = 9{,}8\text{m/s}^2$$

Al reemplazar los valores anteriores en la (130) tenemos:

$$t_v = \frac{2(30\text{m/s})\operatorname{sen}(35º)}{9{,}8\text{m/s}^2}$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la expresión anterior se obtiene el tiempo de vuelo de la pelota:

$$t_v = 3{,}51\text{s}$$

Recuerde que este tiempo es el que emplea el cuerpo en estar a nivel de posición con el punto desde el cual fue lanzado.

b. El alcance horizontal máximo es la distancia que recorre el cuerpo en la dirección *x* en un tiempo equivalente al tiempo de vuelo, a fin de determinarlo se hace uso de (131) es decir:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 sen(2\theta_0)}{g}$$

Al reemplazar los valores correspondientes en (131) tenemos:

$$x_{max} = \frac{(30m/s)^2\ sen(70^0)}{9{,}8m/s^2} = 86{,}29m$$

Es decir, que para $t = t_v$ la pelota ha recorrido en dirección *x* una distancia xmax = 86,29 m.

c. Para responder esta pregunta se hace uso de (132). Esta última permite determinar la altura máxima que alcanza la pelota con respecto al punto desde el cual se lanzó, es decir:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 sen^2\theta_0}{2g}$$

Al reemplazar en esta última expresión los valores correspondientes a los observables físicos presentes en ella tenemos:

$$y_{max} = \frac{(30m/s)^2 sen^2(70^0)}{2(9{,}8m/s^2)} = 40{,}54m$$

Es decir, desde el punto de partida de la pelota hasta que llega a su máxima altura, la distancia que ha recoorido es de y_{max} = 40,54 m.

d. Para determinar el tiempo de subida se hace uso de (129), es decir:

$$t_s = \frac{v_0 sen\theta_0}{g}$$

Al reemplazar en la expresión anterior los valores correspondientes a los observables físicos involucrados en ella tenemos:

$$t_s = \frac{(30\text{m/s})\ \text{sen}(35^0)}{9{,}8\text{m/s}^2} = 1{,}755\text{s}$$

e. Para dar respuesta a esta pregunta se hace uso de (120). Con esta podemos determinar el tiempo que emplea la pelota para ir desde el punto de su lanzamiento hasta el punto de impacto con el piso, es decir:

$$y = y_0 + (v_0 \text{sen}\Theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Con:

$$y = 0 \text{ (en el piso)};\ y_0 = 51{,}60\text{m}\ ;\ v_0 = 30\text{m/s}\ ;\ \Theta_0 = 35^0\ ;\ g = 9{,}8\text{m/s}^2$$

Al reemplazar los valores anteriores en (120) tenemos:

$$0 = 51{,}60\text{m} + (30\text{m/s})\left(\text{sen}35^0\right) t - \frac{1}{2}(9{,}8\text{m/s}^2)t^2$$

Si se realizan las operaciones indicadas y se multiplica toda la ecuación por (-1) en la expresión anterior se llega a:

$$(4{,}9\text{m/s}^2)t^2 - (17{,}20\text{m/s})t - 51{,}60\text{m} = 0$$

Como se observa en la ecuación anterior, esta es una ecuación de tipo cuadrática, la cual se resuelve a través de la ecuación general algebraica:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\alpha c}}{2\alpha}$$

Con:

$$\alpha = 4{,}9\text{m/s}^2\ ;\ b = -\ 17{,}20\text{m/s}\ ;\ c = -\ 51{,}60\text{m}$$

Al reemplazar los valores anteriores en la ecuación general de arriba que permite determinar el tiempo *t* tenemos:

$$t = \frac{17{,}20\text{m/s} \pm \sqrt{(-17{,}20\text{m/s})^2 - 4(4{,}9\text{m/s}^2)(-51{,}60\text{m})}}{2(4{,}9\text{m/s}^2)}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas en el radical se obtiene:

$$t = \frac{17{,}20\text{m/s} \pm \sqrt{1307{,}202\text{m}^2/\text{s}^2}}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{17{,}20\text{m/s} \pm 36{,}15\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2}$$

Si se toma inicialmente en la solución anterior el signo positivo, se halla el primer valor de tiempo, es decir:

$$t = \frac{17{,}20\text{m/s} + 36{,}15\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{53{,}35\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = 5{,}44\text{s}$$

O sea que la primera solución de la ecuación cuadrática anterior es de:

$$t_1 = 5{,}44\text{s}$$

Ahora, al tomar en la solución de arriba el signo negativo, obtenemos el segundo valor de tiempo:

$$t_2 = \frac{17{,}20\text{m/s} - 36{,}15\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{-18{,}95\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = -1{,}93\text{s}$$

Como se puede notar, el tiempo t_2 es negativo, y desde el punto de vista físico esto no tiene sentido, por tanto, el tiempo que demora la pelota en llegar al piso es el determinado en el tiempo t_1, es decir:

$$t = 5{,}44\text{s}$$

f. Para determinar la velocidad de impacto de la pelota con el piso hacemos uso de (125), es decir:

$$\vec{v} = (v_0 \cos\theta_0)\hat{\imath} + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt)\hat{\jmath}$$

Donde:

$$v_0 = 30\text{m/s} \ ; \ \Theta_0 = 35^0; \ g = 9{,}8\text{m/s}^2 \ ; \ t = 5{,}44\text{s}$$

Al reemplazar los valores anteriores en (125) tenemos:

$$\vec{v} = (30\text{m/s})\left(\cos 35^0\right)\hat{\imath} + \left[(30\text{m/s})(\operatorname{sen}35^0) - (9{,}8\text{m/s}^2)(5{,}44\text{s})\right]\hat{\jmath}$$

Si se realizan las operaciones indicadas en cada una de las componentes vectoriales de velocidad se obtiene la velocidad de impacto de la pelota con el piso, es decir:

$$\vec{v} = 24{,}57\text{m/s}\ \hat{\imath} - 36{,}11\text{m/s}\ \hat{\jmath}$$

g. Para determinar la distancia a la que se encuentra el punto de impacto de la pelota con el piso con respecto a la base del edificio se hace uso (122), es decir:

$$x = (v_0 \cos \Theta_0)t$$

Donde:

$$v_0 = 30 m/s \; ; \; \Theta_0 = 35^0 \; ; \; t = 5,44 s$$

Al reemplazar los valores anteriores en (122) tenemos que:

$$x = (30 m/s)\left(\cos 35^0\right)(5,44 s)$$

Si se realizan las correspondientes operaciones en la ecuación aterior se obtiene la distancia requerida:

$$x = 133,685 m$$

h. Para este caso se hace uso de (116), la cual permite determinar el vector de posición de la pelota en cualquier instante de tiempo, es decir:

$$\vec{r} = [x_0 + (v_0 \cos\Theta_0)t]\hat{\imath} + \left[y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\Theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2\right]\hat{\jmath}$$

Donde:

$$v_0 = 30 m/s; \; \Theta_0 = 35^0 \; ; \; g = 9,8 m/s^2 \; ; \; t = 2,5 s \; ; \; x_0 = 0 \; ; \; y_0 = 51,6 m$$

Al reemplazar los valores anteriores en (116) tenemos:

$$\vec{r} = [0 + (30 m/s)\left(\cos 35^0\right)(2,5 s)]\, \hat{\imath} + \left[51,6 m + \left(30 m/s\right)(\operatorname{sen} 35^0)(2,5 s) - \frac{1}{2}(9,8 m/s)(2,5 s)^2\right]\hat{\jmath}$$

Al realizar todas las operaciones indicadas en la expresión anterior se obtiene el vector de posición de la pelota en el tiempo t = 2,5s:

$$\vec{r} = (61,43 m)\hat{\imath} + (63,98 m)\hat{\jmath}$$

Ejemplo 32.

Un jugador de baloncesto lanza la pelota desde un punto diferente al del origen de coordenadas con una rapidez inicial neta de 8 m/s, con el fin de encestarla. El vector de velocidad forma un ángulo con la línea horizontal de 25º. Si la altura de la cesta y la del punto desde la cual se lanza la pelota son de 2,50 m y 2 m, respectivamente, calcule: a) las velocidades iniciales con la que sale disparada la pelota en la dirección *x* y *y*; b) el tiempo de subida de la pelota; c) el tiempo que emplea la pelota en llegar a la cesta; d) la distancia *x* a la que se encuentra la cesta del origen de coordenadas; e) la posición de la cesta; y f) la velocidad con la que llega la pelota a la cesta (véase la Fig. 111).

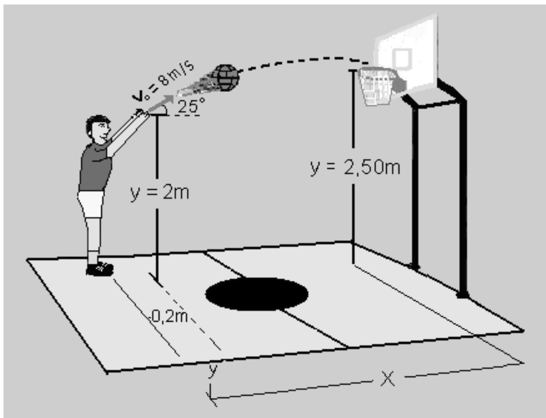


Figura 111. Jugador de baloncesto lanza una pelota hacia la cesta, con una rapidez inicial neta de 8 m/s y un ángulo de disparo de 25º. La altura de la cesta es de 2,50 m, mientras que la altura y_0 desde la cual la persona lanza la pelota es de 2 m; además, el valor de la distancia inicial x_0 desde la cual es lanzada la pelota es de 0,2 m. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para responder esta pregunta se hace uso de (109) y (110), las cuales permiten determinar la velocidad inicial con la que sale el cuerpo disparado en la dirección del eje *x*, y en la dirección del eje *y*, respectivamente:

$$\vec{v}_{0x} = (v_0\cos\Theta_0)\hat{\imath} \ ; \ \vec{v}_{0y} = (v_0 \operatorname{sen}\Theta_0)\hat{\jmath}$$

Donde:

$$v_0 = 8\text{m/s} \ ; \ \Theta_0 = 25^0$$

Al reemplazar los valores anteriores de rapidez inicial neta y del ángulo de disparo en las ecuaciónes vectoriales anteriores tenemos:

$$\vec{v}_{0x} = \left[(8\text{m/s})\cos 25^0\right]\hat{\imath} = [(8\text{m/s})(0{,}906)]\hat{\imath}$$

$$\vec{v}_{0y} = \left[(8\text{m/s})\operatorname{sen} 25^0\right]\hat{\jmath} = [(8\text{m/s})(0{,}422)]\hat{\jmath}$$

Si se desarrollan las operaciones indicadas en las expresiones anteriores se encuentra que las velocidades iniciales con la que sale disparada la pelota de baloncesto, tanto en la dirección *x* como en la dirección *y*, son:

$$\vec{v}_{0x} = 7{,}25\text{m/s}\hat{\imath}$$

$$\vec{v}_{0y} = 3{,}38\text{m/s}\hat{\jmath}$$

b. Para determinar el tiempo de subida de la pelota se hace uso de (129), es decir:

$$t_v = \frac{v_0 \text{sen}\theta_0}{g}$$

Donde:

$$v_0 = 8\text{m/s} \; ; \; \theta_0 = 25^0 : g = 9{,}8\text{m/s}^2$$

Al reemplazar los valores anteriores en la ecuación anterior tenemos:

$$t_s = \frac{(8\text{m/s})\text{sen}25^0}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{(8\text{m/s})(0{,}422)}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{3{,}38\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2}$$

Si se realizan la división indicada en el último fraccionario de la igualdad de arriba, se obtiene finalmente el tiempo de subida de la pelota, es decir:

$$t_s = 0{,}344\text{s}$$

c. Para dar respuesta a esta pregunta se hace uso de (120), es decir:

$$y = y_0 + (v_0 \text{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Para este caso tenemos que:

$$y = 2{,}50\text{m} \; ; \; y_0 = 2\text{m} \; ; \; v_0\text{sen}\theta_0 = 3{,}38\text{m/s} \; ; \; g = 9{,}8\text{m/s}^2$$

Al reemplazar los valores anteriores en (120) se obtiene:

$$2{,}50\text{m} = 2\text{m} + (3{,}38\text{m/s})t - \frac{1}{2}(9{,}8\text{m/s}^2)t^2$$

Si se realizan los desarrollos matemáticos indicados en la expresión anterior se llega a:

$$(4{,}9\text{m/s}^2)t^2 - (3{,}38\text{m/s})t + 0{,}50\text{m} = 0$$

Ahora, al tener presente la ecuación general que permite resolver ecuaciones cuadráticas, es decir:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\alpha c}}{2\alpha}$$

Con:

$$\alpha = 4{,}9\text{m/s}^2 \text{ ; } b = -3{,}38\text{m/s ; } c = 0{,}50\text{m}$$

Al reemplazar los valores anteriores en la ecuación general anterior tenemos:

$$t = \frac{3{,}38\text{m/s} \pm \sqrt{(-3{,}38\text{m/s})^2 - 4(4{,}9\text{m/s}^2)(0{,}50\text{m})}}{2(4{,}9\text{m/s}^2)}$$

Si se desarrollan las operaciones indicadas en el radical en la ecuación anterior tenemos:

$$t = \frac{3{,}38\text{m/s} \pm \sqrt{1{,}63\text{m}^2/\text{s}^2}}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{3{,}38\text{m/s} \pm 1{,}27\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2}$$

Al tomar, inicialmente, en la solución anterior el signo positivo y simplificar términos semejantes se halla el primer valor de tiempo, así:

$$t_1 = \frac{3{,}38\text{m/s} + 1{,}27\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{4{,}65\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = 0{,}474\text{s}$$

O sea que la primera solución de la ecuación cuadrática en *t*, en la parte de arriba, es de:

$$t_1 = 0{,}474\text{s}$$

Ahora, al tomar en la solución general de tiempo el signo negativo se obtiene el segundo valor de tiempo:

$$t_2 = \frac{3{,}38\text{m/s} - 1{,}27\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = \frac{2{,}11\text{m/s}}{9{,}8\text{m/s}^2} = 0{,}215\text{s}$$

Como se puede notar el tiempo t_2 es menor que el tiempo de subida, lo que nos indica que para este valor de tiempo le es imposible a la pelota haber llegado a la cesta, por tanto, el tiempo que demora la pelota en estar encestada es el determinado en el tiempo t_1, es decir:

$$t = 0{,}474s$$

d. Al tomar la (119), es decir:

$$x = x_0 + (v_0 cos\Theta_0)\ t$$

Con:

$$x_0 = 0{,}2m\ ;\ v_0 = 8m/s\ ;\ t = 0{,}474\ s$$

Si se sustituyen los valores de arriba en (119) tenemos que:

$$x = 0{,}2m + [\ (8m/s)(cos25^0)\ ]\ (0{,}474s)$$

Al realizar las operaciones indicadas en la expresión anterior se obtiene:

$$x = 3{,}636m$$

De este resultado se puede concluir que la cesta desde un punto ubicado en los pies del jugador (origen de coordenadas) se encuentra a una distancia en dirección x de 3,636 m.

e. Para determinar el vector de posición de la cesta se hace uso de (94), ya que se conocen los valores tanto de *x* como de *y* para este caso, es decir:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = \vec{x} + \vec{y}$$

Donde:

$$y = 2{,}50m\ ;\ x = 3{,}636m$$

Por tanto, el vector de posición de la cesta con respecto al origen del sistema de coordenadas está dado por:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = 3{,}636m\hat{\imath} + 2{,}50m\hat{\jmath}$$

f. Para determinar la velocidad con la que la pelota llega a la cesta se hace uso de (125):

$$\vec{v} = (v_0 cos\Theta_0)\hat{\imath} + (v_0 sen\Theta_0 - gt)\hat{\jmath}$$

Donde:

$$v_0 = 8m/s \; ; \; \Theta_0 = 25^0 \; ; \; g = 9{,}8m/s^2 \; ; \; t = 0{,}474s$$

Al sustituir los valores de los observables físicos anteriores en (125) tenemos:

$$\vec{v} = \left[(8m/s)(\cos 25^0)\right]\hat{\imath} + \left[(8m/s)(\text{sen}25^0) - (9{,}8m/s^2)(0{,}474s)\right]\hat{\jmath}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas en cada uno de los corchetes de las respectivas componentes vectoriales, encontramos que la velocidad con la que llega la pelota a la cesta está dada por la expresión vectorial:

$$\vec{v} = (7{,}25m/s)\,\hat{\imath} - (1{,}26m/s)\hat{\jmath}$$

3) Movimiento circular

Todo cuerpo en movimiento que presente como trayectoria una circunferencia se dice que tiene un movimiento de tipo circular. Además, como el cuerpo en su recorrido rotatorio describe un ángulo variable en el tiempo, este último se mide respecto al eje *x* positivo en [39]. En este tipo de movimiento se presentan el movimiento circular uniforme y el movimiento circular uniformemente acelerado. En la Fig. 112 se muestra un malabarista forzando a varias pelotas a realizar un movimiento de tipo circular.

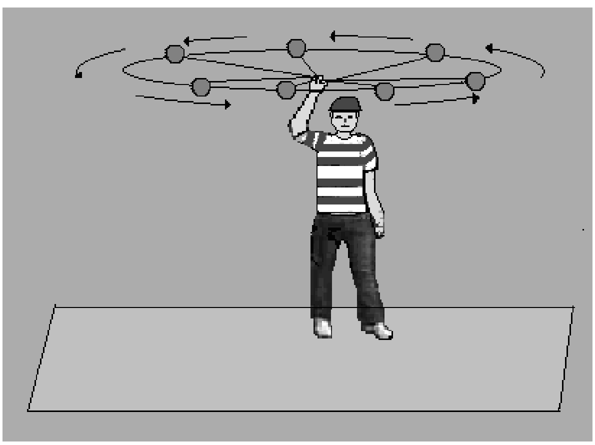


Figura 112. Malabarista creándole a varias pelotas alrededor de su mano un movimiento de tipo circular. Fuente: elaboración propia

a) Movimiento circular uniforme

En muchos de los movimientos de cuerpos que ocurren en nuestra vida cotidiana encontramos varias situaciones en los que estos se mueven en trayectorias circulares. Como ejemplos comunes de este tipo de movimiento tenemos el movimiento de las aspas de los abanicos, las cuchillas de una cortadora de césped, las llantas de un auto, las manecillas del reloj, etc. En sí, cada uno de los ejemplos de movimiento citados en este párrafo pertenecen al movimiento llamado “de rotación”. En este, cada componente (partícula) del cuerpo describe una trayectoria de tipo circular con respecto a un eje llamado “eje de rotación”.

Como es de conocimiento, el movimiento circular uniforme pertenece al movimiento de rotación y es el menos complejo entre este tipo de movimiento. Se caracteriza porque, además de que el cuerpo describe una trayectoria circular, recorre arcos de circunferencia iguales en intervalos de tiempos iguales. Lo anterior implica que su rapidez no varia en el tiempo más no así su velocidad, la cual se considera variable debido a los cambios en su dirección. Estos cambios de dirección en el móvil le crea una aceleración, la cual es causada por una fuerza de tipo central, es decir, perpendicular a su trayectoria y cuyo valor es constante [39], [44]. En la Fig. 113 se observa lo expresado anteriormente.

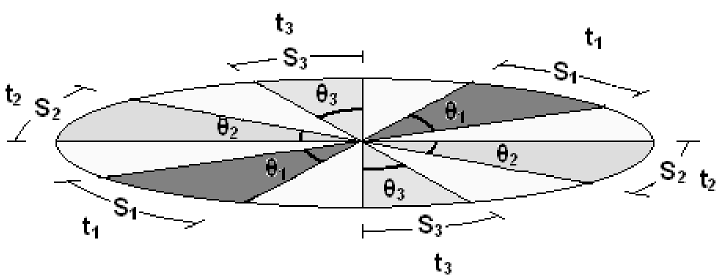


Figura 113. En un movimiento circular uniforme, el móvil recorre distancias iguales en tiempos iguales. De igual manera, se puede decir que recorre ángulos iguales en tiempos equivalentes. Fuente: elaboración propia

De acuerdo también con [44], se puede definir el movimiento circular uniforme como aquel movimiento en el cual el cuerpo describe ángulos iguales en intervalos de tiempos iguales, es decir, según [41], su aceleración angular es nula. Esta última definición surge debido a que cuando se recorren longitudes de arcos iguales en una circunferencia, a estos les corresponden ángulos subtendidos equivalentes, tal como se observa en Fig. 113. Además, el movimiento circular uniforme se incluye dentro de los denominados "movimientos periódicos", porque se repite a intervalos iguales de tiempo, es decir, el tiempo que emplea el móvil en realizar cada una de las vueltas es el mismo.

- **Periodo T y frecuecia f.**

Ahora bien, de acuerdo con [35], en el movimiento circular uniforme se conoce como "periodo de movimiento" al tiempo que emplea el cuerpo en dar una vuelta completa. Además, para [41], cuando pasa un tiempo de un periodo el móvil ha cumplido un ciclo en el que se encuentra en el mismo estado de movimiento. El periodo se representa con la letra "T" mayúscula y su unidad de medida definida en el sistema internacional es el segundo (s).

De acuerdo con lo expresado en [41], el periodo de un cuerpo que describe un movimiento de tipo circular uniforme se define por medio de la ecuación:

$$T=\frac{t}{n} \tag{133}$$

Donde:

- T: Representa el periodo de movimiento, es decir, el tiempo empleado por el cuerpo en dar una vuelta completa.
- n: representa el número de vueltas dadas en el tiempo *t*.
- t: representa el tiempo empleado en dar el número de vueltas *n*.

Por su parte, la frecuencia (*f*) en el movimiento circular uniforme se define como la razón entre el número de vueltas y el tiempo empleado en realizarlas [35], [41]. Por otro lado, es muy común su utilización para caracterizar el movimiento circular cuando el periodo, es decir, el tiempo empleado en dar una vuelta completa, es relativamente pequeño. La frecuencia se simboliza por la letra *f* y su unidad de medida en el sistema internacional es el hertz (s^{-1}).

De acuerdo con lo expresado en [41], la ecuación matemática que la define está dada por:

$$f=\frac{n}{t} \tag{134}$$

Donde:

- f: representa la frecuencia.
- n: representa el número de vueltas dadas por el móvil.
- t: representa el tiempo empleado en dar el número de vueltas *n*.

Si se observan (133) y (134), las cuales definen el periodo y la frecuencia respectivamente, de acuerdo con [35] y [41], se concluye que entre estos dos observables físicos existe una relación de tipo inverso, es decir:

$$f = \frac{1}{T} \tag{135}$$

Ejemplo 33.

Un atleta emplea un tiempo de 4 s en dar ocho vueltas a una pista circular a rapidez constante. Calcule la frecuencia y el periodo de movimiento del atleta (véase la Fig. 114).

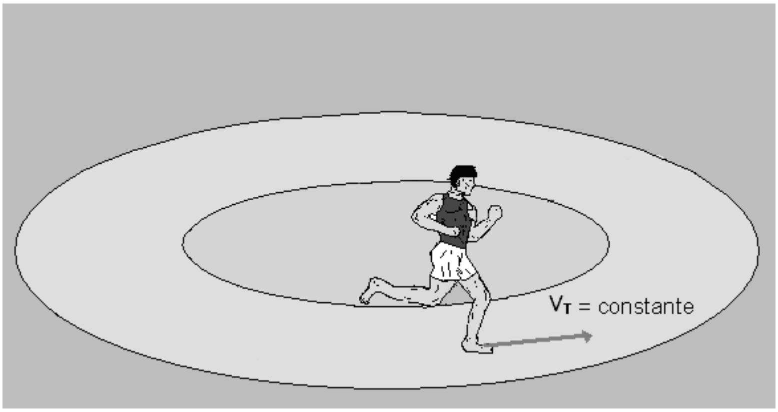


Figura 114. Atleta moviendose en una pista circular con rapidez constante.
Fuente: elaboración propia

Solución

a) Del planteamiento del ejercicio se pueden deducir los siguientes valores de tiempo y números de vueltas:

$$t = 4s \text{ y } n = 8 \text{ vueltas}$$

Si se tiene presente (134), es decir:

$$f=\frac{n}{t}$$

Al reemplazar en la expresión anterior los valores de tiempo y número de vueltas se obtiene el valor de la frecuencia, así:

$$f=\frac{n}{t}=\frac{8\text{vueltas}}{4\text{s}}=2\ \text{vueltas/s}=2\text{hz}$$

El resultado anterior nos da a entender que por cada segundo que transcurre el atleta realiza dos vueltas.

Ahora, al hacer uso de (133) para calcular el periodo, es decir:

$$T=\frac{t}{n}$$

Si se reemplazan los valores anteriores de tiempo y número de vueltas en la ecuación anterior obtenemos el valor del periodo, así:

$$T=\frac{4\text{s}}{8\ vueltas}=0{,}5\text{s}$$

El resultado obtenido en la parte de arriba sugiere que por cada vuelta dada se emplea un tiempo de 0,5 s.

Ejemplo 34.

En otro día de entrenamiento el atleta del ejemplo 33, quien se mueve otra vez a rapidez constante, presenta una frecuencia f = 0,5 hz. ¿Cuál es su periodo de movimiento?

Solución

Al hacer uso de (135), es decir:

$$f=\frac{1}{T}$$

Si se despeja la variable de tiempo *T* en (135) y se reemplaza el valor de frecuencia f = 0,5 s, se obtiene el periodo de movimiento del atleta, así:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{0{,}5\text{s}^{-1}}=2\text{s}$$

• Velocidad tangencial y rapidez tangencial

Ahora, bien, para todo cuerpo que rote alrededor de un eje central —como se explicó— se dice que describe una trayectoria de tipo circular a su alrededor. Así, en cada uno de los puntos imaginarios por los cuales pasa e integran la trayectoria circular del móvil este último presenta una velocidad llamada “velocidad tangencial”. De acuerdo con [42], se le define así por ser siempre tangente a la trayectoria, es decir, que corta o toca esta última en un solo punto, tal como se observa en la Fig. 115.

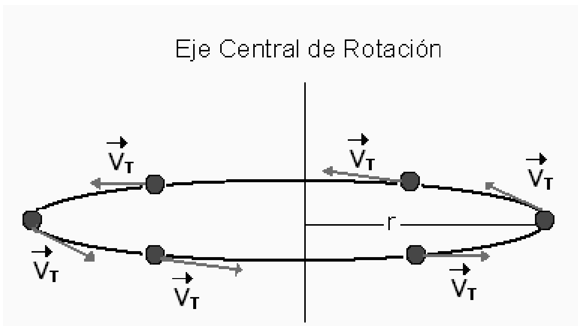


Figura 115. Velocidad tangencial a la trayectoria circular de una pelota que describe un movimiento de tipo circular. Fuente: elaboración propia

La velocidad tangencial no es la misma en todos los puntos de la trayectoria, ya que la dirección en la que apunta en cada uno de ellos es diferente, tal como se muestra en la Fig. 116.

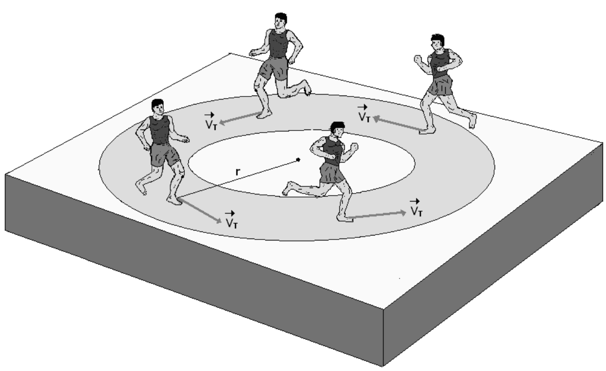


Figura 116. El hecho de que la velocidad tangencial sea de carácter vectorial, y que a medida que el atleta se mueve en la trayectoria circular cambie su dirección, esto último genera una variación en ella. Fuente: elaboración propia

Dado que en el movimiento circular uniforme se lleva acabo un movimiento de tipo curvilíneo (circunferencia), de acuerdo con [35], la ecuación matemática vectorial que permite determinar la velocidad tangencial del cuerpo está dada por:

$$\vec{V}_T = \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t}.$$

Donde:

- $\vec{V}_T$: representa la velocidad tangencial
- $\overrightarrow{\Delta s}$: representa el desplazamiento de arco circunferencial recorrido por el cuerpo en el tiempo
- Δt: representa el intervalo de tiempo empleado en recorrer el arco de desplazamiento $\overrightarrow{\Delta s}$.

Ahora, como la rapidez tangencial en este tipo de movimiento es constante, se puede determinar esta en el momento y punto en el que el cuerpo ha realizado una vuelta completa. Es decir, cuando la magnitud de desplazamiento $\Delta s = 2\pi r$ y el tiempo empleado $\Delta t = T$, de modo que queda la expresión de arriba de forma escalar de la siguiente manera:

$$V_T = \frac{2\pi r}{T} \tag{136}$$

Donde:

- V_T: representa la magnitud de la velocidad tangencial.
- r: representa la distancia radial al eje de rotación.
- T: representa el periodo de movimiento.
- $2\pi r$: es la longitud de la trayectoria, que para este caso es el perimetro (circunferencia) del círculo descrito por el móvil.

Al realizar un análisis de (136) se observa que la rapidez tangencial del móvil que describe un movimiento circular uniforme es proporcional a su distancia radial *r*, medida esta última con respecto al punto o eje central de rotación. Lo expresado en estas líneas nos lleva afirmar que entre más lejos esté el cuerpo respecto a su eje de rotación, su rapidez tangencial será mucho mayor. Por ejemplo, si tenemos un cuerpo rígido, como, por ejemplo, una barra, que rota en la dirección contraria a las manecillas del reloj alrededor de un eje ubicado en uno de sus extremos —tal como se muestra en la Fig. 117— el punto extremo del segmento de barra representado como s_1, y de radio r_1, se moverá con menor velocidad tangencial que el punto extremo del segmento de barra s_2 y de radio r_2. Ahora, al tener presente (136), y ya que todas las partes que integran el sólido emplean el mismo tiempo (periodo) en dar una vuelta completa, es necesario asegurar que la velocidad tangencial 1 es menor que la velocidad tangencial 2, es decir:

$$\vec{V}_{T1} < \vec{V}_{T2}$$

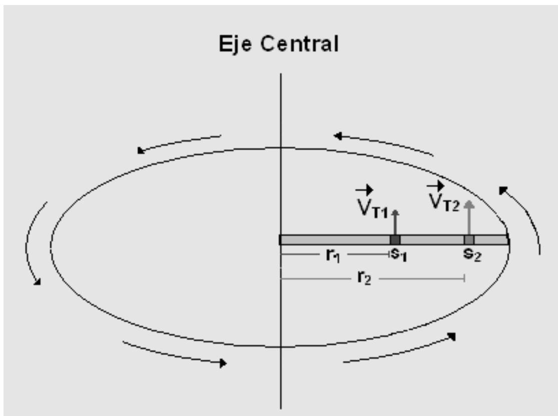


Figura 117. Dos segmentos s_1 y s_2 de la barra rotatoria que describe un movimiento de tipo circular. El punto extremo del segmento s_1, por tener radio menor, viajará a más baja velocidad que el punto extremo del segmento s_2. Fuente: elaboración propia

Algo de mucha importancia, y que merece una vez más una aclaración desde el punto de vista conceptual, es que en el movimiento circular uniforme lo que permanece constante del móvil no es su velocidad tangencial, sino su rapidez. La explicación a la anterior afirmación es que el cuerpo, durante su desplazamiento, aunque mantiene constante su magnitud, varía su dirección en cada punto de su trayectoria, y como es de conocimiento, esta hace parte de la velocidad, la cual es un vector. Por tanto, se concluye que la velocidad tangencial del cuerpo en el movimiento circular uniforme no es constante en el tiempo, tal como se había expresado anteriormente (véanse las figuras 115 y 116).

Ahora, de acuerdo con lo planteado en [41] y [45], la velocidad tangencial de un cuerpo que se mueve en un plano *xy* con movimiento circular uniforme queda expresada en términos de los vectores unitarios escalares $\hat{I}$ y $\hat{J}$ por medio de la ecuación vectorial:

$$\vec{V}_T = \frac{2\pi r}{T}(-\mathrm{Sen}\theta\hat{I} + \mathrm{Cos}\theta\hat{J}) \tag{137}$$

Donde:

- $-Sen\Theta\hat{I} + Cos\Theta\hat{J}$: representa al vector transversal unitario definido en el sistema de coordenadas polares, el cual está en función de los vectores unitarios cartesiano.
- Θ = wt: es el ángulo subtendido entre el eje *x* positivo y el vector de posición $\vec{r}$ radial del cuerpo. Siendo *w* su velocidad angular y *t* el tiempo empleado en su recorrido.

Ejemplo 35.

Una partícula con movimiento circular uniforme describe una trayectoria circular en el plano *xy* de radio r = 4 cm. Si su periodo de movimiento es de T = 2 s, calcule: a) su rapidez tangencial, y b) su velocidad tangencial para $\theta = 60^0$ y $\theta = 120^0$. Véase la Fig. 118.

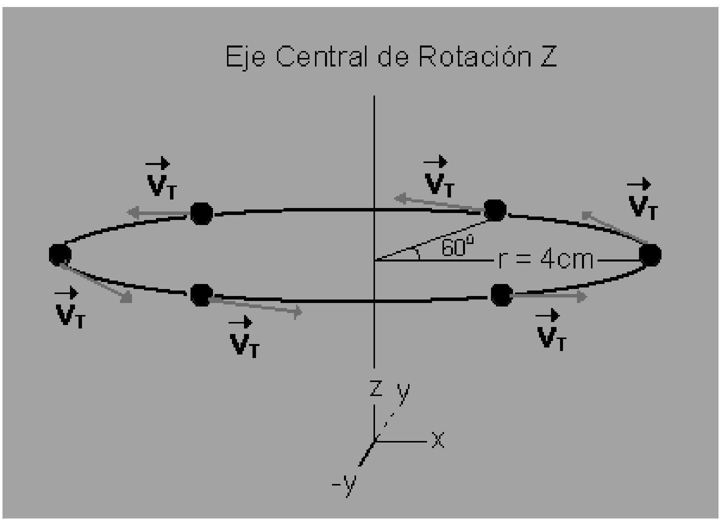


Figura 118. Partícula que describe una trayectoria circular de radio r = 4 cm y periodo T = 2 s. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Al hacer uso de (136), es decir:

$$V_T = \frac{2\pi r}{T}$$

Con:

$$r = 4cm;\ T = 2s;\ \pi = 3{,}1416$$

Si se reemplazan los valores anteriores del radio y del periodo en (139), tenemos:

$$V_T = \frac{2(3{,}1416)(4cm)}{2s} = \frac{25{,}1328cm}{2s} = 12{,}56cm/s$$

Es decir, la rapidez tangencial de la partícula es de:

$$V_T = 12{,}56cm/s$$

b. Para determinar la velocidad tangencial de la partícula se hace uso de (137), es decir:

$$\vec{V}_T = \frac{2\pi r}{T}\left(-\operatorname{Sen}\Theta\,\hat{\imath} + \operatorname{Cos}\Theta\,\hat{\jmath}\right)$$

Donde:

$$\frac{2\pi r}{T} = 12{,}56cm/s\ ;\ \Theta = \mathbf{60^o}$$

Al reemplazar los valores de las expresiones anteriores en (137), tenemos que:

$$\vec{v}_T = (12{,}56cm/s)\left[-\operatorname{Sen}(60^0)\,\hat{\imath} + \operatorname{Cos}(60^0)\,\hat{\jmath}\right]$$

Si se determinan los valores del seno y del coseno para el ángulo de 60º en el corchete de la expresión de arriba, se obtiene:

$$\vec{v}_T = (12{,}56cm/s)\left[-0{,}86\,\hat{\imath} + 0{,}5\,\hat{\jmath}\right]$$

Al realizar la multiplicación indicada en la ecuación anterior, se obtiene, finalmente, la velocidad tangencial de la partícula para cuando esta ha barrido un ángulo de 60º con respecto al eje *x* positivo, así:

$$\vec{v}_T = (10{,}80cm/s)(-\hat{\imath}) + (6{,}28cm/s)\hat{\jmath}$$

Para $\theta = 120^0$ tenemos que:

$$\vec{v}_T = (12{,}56cm/s)\left[-\operatorname{Sen}(120^0)\,\hat{\imath} + \operatorname{Cos}(120^0)\,\hat{\jmath}\right]$$

Al determinar los valores del seno y del coseno para el ángulo de 120º en el corchete se obtiene:

$$\vec{v}_T = (12{,}56\text{cm/s})\left[-0{,}86\hat{\imath} - 0{,}5\hat{\jmath}\right]$$

Si se realiza la multiplicación indicada en la expresión de arriba se tiene, finalmente, la velocidad tangencial de la partícula, cuando esta ha barrido un ángulo con respecto al eje *x* positivo de 120º:

$$\vec{v}_T = (10{,}80\text{cm/s})(-\hat{\imath}) + (6{,}28\text{cm/s})(-\hat{\jmath})$$

Ejemplo 36.

La llanta de una cicla se mueve con movimiento circular uniforme, con rapidez tangencial v_T = 2 m/s y distancia radial r = 30 cm. Si el ángulo subtendido entre cada uno de los radios pertenecientes a la rueda es de 30º, calcule: a) el periodo y la frecuencia de movimiento de un punto de la rueda; b) la velocidad tangencial del punto de ajuste del primero, cuarto, séptimo y décimo radio de la rueda (véase la Fig.119).

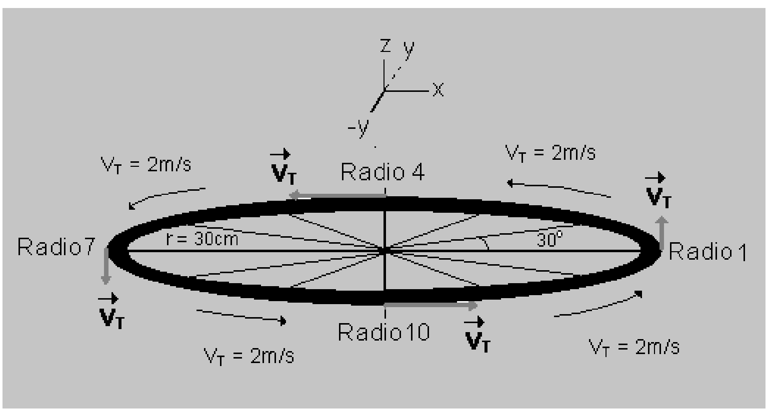


Figura 119. Rueda de bicicleta que describe una trayectoria de tipo circular en el plano *xy*, de radio r = 30 cm y rapidez tangencial v_T = 2 m/s. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Al hacer uso de (136), es decir:

$$V_T = \frac{2\pi r}{T}$$

Si se despeja la variable de periodo *T* en la ecuación anterior se obtiene:

$$T=\frac{2\pi r}{V_T}$$

Del planteamiento del problema se deducen los siguientes valores:

$$r = 30cm = 0{,}3m \;;\; v_T= 2m/s$$

Al reemplazar los valores anteriores de radio y rapidez tangencial en la expresión de arriba para deducir el periodo, tenemos que:

$$T=\frac{2(3{,}1416)(0{,}3m)}{2m/s} = 0{,}94s$$

Para determinar la frecuencia se utiliza (135), es decir:

$$f=\frac{1}{T}$$

Si se reemplaza el valor del periodo en la ecuación anterior se obtiene el valor de la frecuencia de un punto de la rueda:

$$f=\frac{1}{0{,}94s} = 1{,}06s^{-1}$$

Es decir que su frecuencia en Hertz es de:

$$f=1{,}06herz$$

b. Para determinar la velocidad tangencial del primero, cuarto, séptimo y décimo radio de la rueda, se hace uso de (137), es decir:

$$\vec{V}_T= \frac{2\pi r}{T}(-Sen\Theta\hat{I} + Cos\Theta\hat{J})$$

Donde:

$$V_T= \frac{2\pi r}{T}=2m/s \;;\; \Theta_1 = 0^0 \;;\; \Theta_4 = 90^0 \;;\; \Theta_7 =180^0 \;;\; \Theta_{10} = 270^0$$

La velocidad tangencial del primer radio se determina por medio de la siguiente expresión:

$$\vec{V}_{T1}= 2m/s(-Sen\Theta_1\hat{I} + Cos\Theta_1\hat{J})$$

Al reemplazar el valor de $\theta_1 = 0$ en la expresión anterior tenemos que:

$$\vec{V}_{T1} = 2m/s(-Sen0^0\hat{I} + Cos0^0\hat{J})$$

Si se hallan los valores del seno y del coseno para para el ángulo de 0º se obtiene, finalmente, la velocidad tangencial del punto de ajuste para el radio 1 de la rueda, así:

$$\vec{V}_{T1} = 2m/s\left[-(0)\hat{I} + (1)\hat{J}\right] = 2m/s\hat{J}$$

De la misma forma como se determinó la velocidad tangencial del punto de ajuste para el radio 1, se obtiene la velocidad tangencial para los otros radios, así:

Para el radio 4:

$$\vec{V}_{T4} = 2m/s(-Sen\Theta_4\hat{I} + Cos\Theta_4\hat{J})$$

Al reemplazar el valor de $\theta 4 = 90^o$ en la expresión anterior y determinar su seno y coseno, se obtiene la velocidad tangencial del punto de ajuste del radio 4, así:

$$\vec{V}_{T4} = 2m/s(-Sen90^0\hat{I} + Cos90^0\hat{J}) = -2m/s\hat{I}$$

Para el radio 7 tenemos:

$$\vec{V}_{T7} = 2m/s(-Sen\Theta_7\hat{I} + Cos\Theta_7\hat{J})$$

Al reemplazar el valor de $\theta_7 = 90^0$ en la expresión anterior y determinar su seno y coseno, se obtiene la velocidad tangencial del punto de ajuste del radio 7, así:

$$\vec{V}_{T7} = 2m/s(-Sen180^0\hat{I} + Cos180^0\hat{J}) = -2m/s\hat{I}$$

Para el radio 10 tenemos:

$$\vec{V}_{T10} = 2m/s(-Sen\Theta_{10}\hat{I} + Cos\Theta_{10}\hat{J})$$

Al reemplazar el valor de $\theta_{10} = 270^0$ en la expresión anterior y determinar su seno y coseno, se obtiene la velocidad tangencial del punto de ajuste del radio 10, así:

$$\vec{V}_{T10} = 2m/s(-Sen270^0\hat{I} + Cos270^0\hat{J}) = 2m/s\hat{I}$$

Se puede concluir de los resultados anteriores de velocidad tangencial para los diferentes radios que sus velocidades son diferentes, aunque presentan la misma rapidez.

- ### Aceleración radial o centripeta

Por otra parte, como se mencionó y demostró en el ejercicio anterior, en el movimiento circular uniforme la velocidad lineal del cuerpo varía debido al cambio permanente en su dirección. Esto último, de acuerdo con [4], hace que el móvil en su trayectoria circular presente una aceleración conocida en este caso como "aceleración radial" o "centrípeta". Además, el hecho de que la magnitud de la velocidad tangencial del móvil (rapidez tangencial) permanezca constante, indica que la aceleración no se presenta en la dirección lineal de la trayectoria, si no que es perpendicular a esta última, es decir, su dirección es de carácter radial o central, tal como se muestra en la Fig 120.

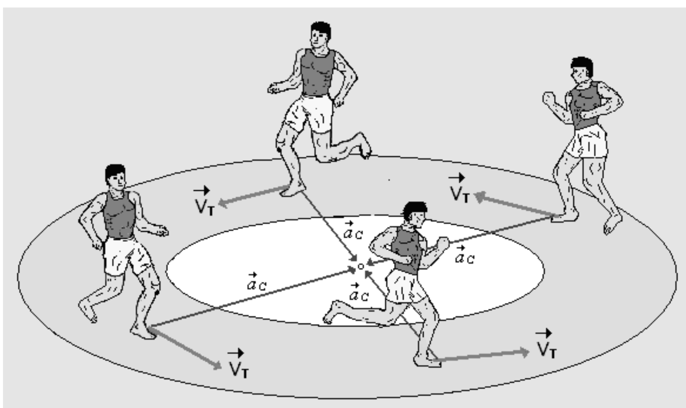


Figura 120. Atleta en movimiento con una aceleración centrípeta en dirección central o radial, debido al cambio permanente en su dirección. Fuente: elaboración propia

Como es de conocimiento, Isaac Newton fue el primero en hablar de la aceleración centrípeta o radial, la cual experimenta todo cuerpo que describe un movimiento de tipo circular. Esto, debido al cambio permanente en su dirección a medida que se desplaza alrededor de su trayectoria. Ahora, con el fin de obtener la expresión matemática que permita determinar la magnitud de la aceleración centrípeta, consideremos un atleta que presenta un movimiento circular uniforme y cuyas velocidades tangenciales $\vec{V}_{T1}$ y $\vec{V}_{T2}$, en dos posiciones y tiempos t_1 y t_2 diferentes, respectivamente, se muestran en la Fig. 121.

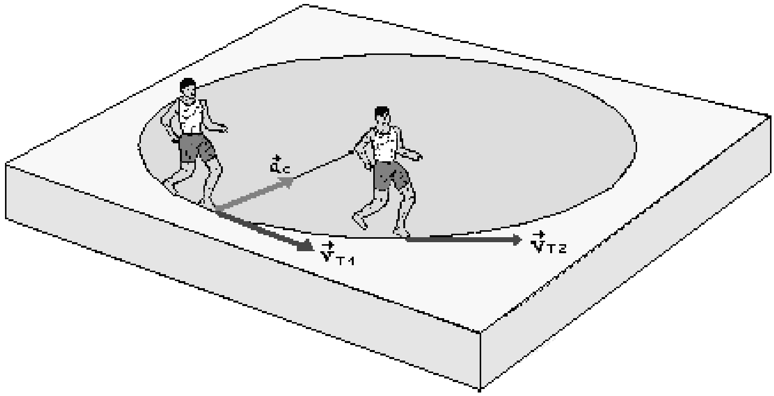


Figura 121. Velocidades tangenciales de un atleta en dos puntos diferentes de su trayectoria. También se muestra su aceleración centrípeta. Fuente: elaboración propia

Al analizar las velocidades mostradas en la Fig. 121 se obtiene la Fig. 122, la cual muestra la dirección de la aceleración centrípeta del atleta.

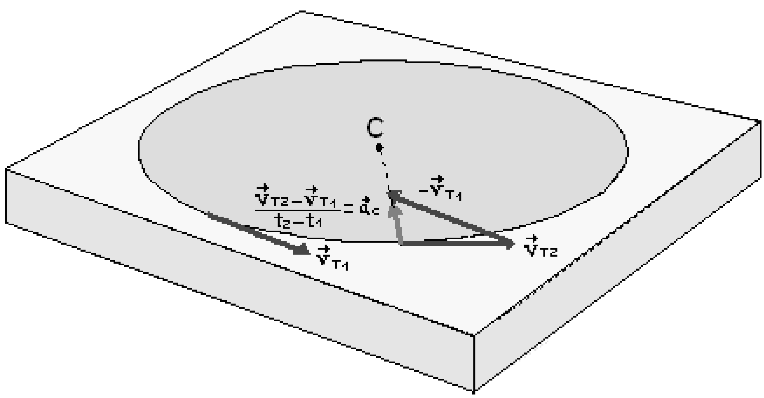


Figura 122. Dirección central de la aceleración del atleta debido al cambio en la dirección de su velocidad. Fuente: elaboración propia

Al tomar los dos puntos de posición final e inicial del atleta mostrados en la Fig. 122 se obtiene la Fig. 122, en la cual se deducen los triángulos mostrados en ella.

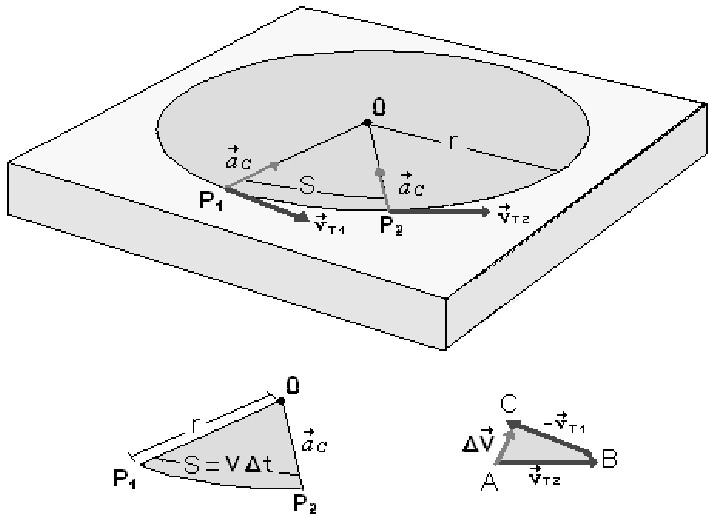


Figura 123. Triángulos equivalentes deducidos de la figura mostrada en la parte superior.
Fuente: elaboración propia

Ahora, debido a la congruencia de los triángulos mostrados en la Fig. 123, se obtiene la igualdad entre las razones de longitudes deducidas en ellos, así:

$$\frac{\overline{0p_1}}{\overline{p_1p_2}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$$

Con:

$$\overline{0p_1} = r \ ; \ \overline{p_1p_2} = S = v\Delta t \ ; \ \overline{CA} = \Delta v \ ; \ \overline{AB} = v, \text{ aquí } v = \left|\vec{V}_{T1}\right| = \left|\vec{V}_{T2}\right|$$

Al reemplazar estas equivalencias en la igualdad de razones anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{r}{v\Delta t}=\frac{v}{\Delta v}$$

Si se realizan algunos procedimientos matemáticos de despeje se obtiene la ecuación:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v^2}{r} \tag{138}$$

Sin embargo, según (55) se conoce que $\overline{\alpha}=\frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$, de modo que esta última expresión representa la magnitud de la aceleración centrípeta media del atleta. Al aplicar el $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ en ambos miembros de (138), tenemos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v^2}{r}$$

Pero como $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha$, donde α es la magnitud de la aceleración instantánea del móvil. Además $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{r}$, ya que este término es una constante de movimiento por ser v y r constantes.

De acuerdo con [4], [17] y [46], y de lo expresado más arriba, se obtiene que la ecuación matemática que define la magnitud de la aceleración centrípeta del cuerpo que describe un movimiento circular uniforme está dada por:

$$\alpha_c = \frac{v^2}{r} \tag{139}$$

Con $v = v_T$, donde v_T es la magnitud de la velocidad tangencial del cuerpo.

Además, según [17], el vector de aceleración centrípeta de un cuerpo que describe un movimiento circular se puede expresar por medio del producto vectorial entre el vector de velocidad angular $\overrightarrow{W}$ y el vector de velocidad tangencial $\vec{V}_T$ del cuerpo, es decir:

$$\vec{\alpha}_c = \overrightarrow{w} \times \vec{v}_T \tag{140}$$

De (140) se deduce que la aceleración centrípeta en el movimiento circular es perpendicular tanto al vector de velocidad angular como al vector de velocidad tangencial como se muestra en la Fig. 124. Más adelante se hará uso de esta ecuación en la solución de ejercicios en los que se pide determinar la aceleración centrípeta de un cuerpo que describe una trayectoria circular.

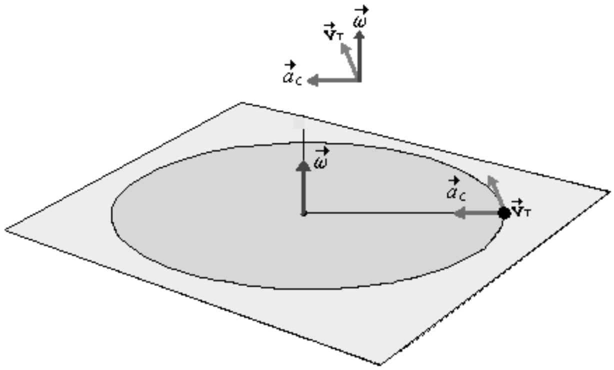


Figura 124. La aceleración centrípeta es perpendicular tanto al vector de velocidad angular como al vector de velocidad tangencial y viceversa. Fuente: elaboración propia

Ejemplo 37.

Un auto describe un movimiento circular uniforme en un autodromo. Si el radio *r* de la pista circular del autodromo es de 30,5 m y la rapidez tangencial constante del auto es de 50 km/h, calcule la magnitud de su aceleración centrípeta (véase la Fig. 125).

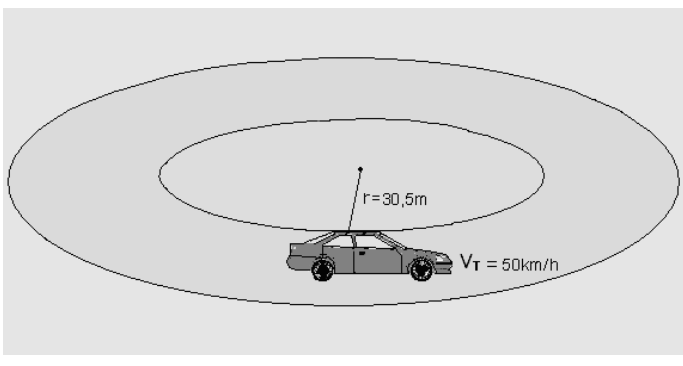


Figura 125. Auto en movimiento en una autopista circular de radio r =30,5 m y con rapidez tangencial constante de 50 km/h. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Al hacer uso de (139), es decir,

$$\alpha_c = \frac{v^2}{r}$$

Donde:

$$v = v_T = 50km/h \ ; \ r = 30{,}5m = 0{,}0305 \ km$$

Si se reemplazan los valores anteriores de rapidez tangencial y del radio de trayectoria en (139), tenemos que:

$$\alpha_c = \frac{(50km/h)^2}{0{,}0305km} = \frac{2500km^2/h^2}{0{,}0305km}$$

Al realizar la división indicada y simplificar términos semejantes en la expresión anterior, se obtiene la magnitud de la aceleración centrípeta del auto pedida, así:

$$\alpha_c = 81\ 967{,}21 km/h^2$$

Ejemplo 38.

Dos ruedas dentadas se encuentran conectadas a través de una banda conductora que se mueve a rapidez constante v_T; si el periodo de la rueda más pequeña de radio r_1 = 0,2 m es de T_1 = 0,5 s: a), ¿cuál es el periodo de la rueda más grande de radio r_2 = 0,4m?, b), ¿cuál es la rapidez tangencial v_T de la banda y de los dientes de la rueda?, c) ¿cuál es la magnitud de la aceleración centrípeta de cada uno de los dientes de las ruedas? Véase la Fig. 126.

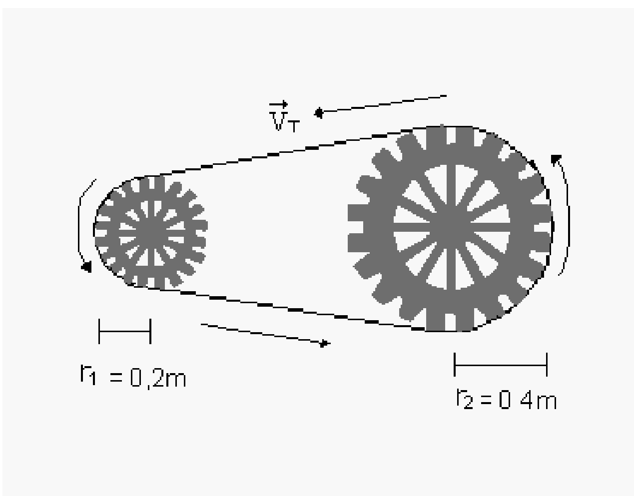


Figura 126. Ruedas dentadas conectadas a una banda conductora de rapidez tangencial v_T; el radio de la rueda más pequeña es r_1 = 0,2 m, y la de la rueda más grande es r_2 = 0,4 m. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar el periodo de movimiento de la rueda de mayor tamaño se tiene en cuenta (136), es decir:

$$v_T = \frac{2\pi r}{T}$$

Ahora, si se tiene presente (136), se determinan las expresiones matemáticas que permiten obtener la rapidez tangencial de cada una de las ruedas, así:

$$v_{T1} = \frac{2\pi r_1}{T_1} \quad ; \; v_{T2} = \frac{2\pi r_2}{T_2}$$

El hecho de que ambas ruedas se encuentren conectadas por la misma banda garantiza que presenten la misma rapidez tangencial, es decir:

$$v_{T1} = v_{T2} = v_T$$

De lo expresado anteriormente se concluye que:

$$\frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{2\pi r_2}{T_2}$$

Al simplificar el término semejante 2π en la expresión anterior se obtiene que:

$$\frac{r_1}{T_1} = \frac{r_2}{T_2} \tag{141}$$

Al despejar T_2 en (141) tenemos:

$$T_2 = \frac{r_2 T_1}{r_1}$$

Si se reemplazan los valores: r_1 = 0,2 m; r_2 = 0,4 m y T_1 = 0,5 s en la expresión anterior, y se simplifican términos semejantes, se obtiene finalmente el periodo de movimiento de los dientes de la rueda más grande, así:

$$T_2 = \frac{(0{,}4\text{m})(0{,}5\text{s})}{0{,}2\text{m}} = 1\text{s}$$

b. Al hacer uso de nuevo de (136), es decir:

$$v_T = \frac{2\pi r}{T}$$

Con:

$$r = r_1 = 0{,}2\text{m} \; ; \; T_1 = 0{,}5\text{s}$$

Si se sustituyen los valores anteriores en (136), se obtiene la rapidez tangencial tanto de la banda conductora como la de los dientes de las ruedas, así:

$$v_T = \frac{2(3{,}1416)(0{,}2\text{m})}{0{,}5\text{s}} = 2{,}51\text{m/s}$$

c. Para dar respuesta a esta pregunta se hace uso de (139), es decir:

$$\alpha_c = \frac{v^2}{r}$$

Donde:

$$v_{T1} = v = 2{,}51\text{m/s y } r = r_1 = 0{,}2\text{m}$$

Al reemplazar los valores anteriores en (139) y realizar las operaciones correspondientes, se obtiene el valor de la magnitud de la aceleración centrípeta que presentan los dientes de la rueda 1, así:

$$\alpha_{c1} = \frac{(2{,}51\text{m/s})^2}{0{,}2\text{m}} = 31{,}50\text{m/s}^2$$

De la misma forma se determina la magnitud de la aceleración centrípeta de los dientes de la rueda 2, donde:

$$v_{T2} = v = 2{,}51\text{m/s y } r = r_2 = 0{,}4\text{m}$$

Al sustituir los valores anteriores en (139), y al realizar las operaciones correspondientes, se obtiene el valor de la magnitud de la aceleración centrípeta que presentan los dientes de la rueda 2, así:

$$\alpha_{c2} = \frac{(2{,}51\text{m/s})^2}{0{,}4\text{m}} = 15{,}75\text{m/s}^2$$

- ### Desplazamiento angular

Ahora bien, cuando un cuerpo que describe un movimiento de tipo circular se desplaza de un punto a otro en su trayectoria y, aunque su radio de curvatura permanezca constante, el ángulo que subtiende su vector de posición varía en el tiempo, generándose lo que se llama un "desplazamiento angular". Según [44], este desplazamiento, de acuerdo con el ángulo de giro, específica el grado de rotación sufrido por el móvil en su trayectoria. Lo expresado permite concluir que el movimiento circular se puede caracterizar también por medio de este observable físico, tal como se muestra en la Fig. 127.

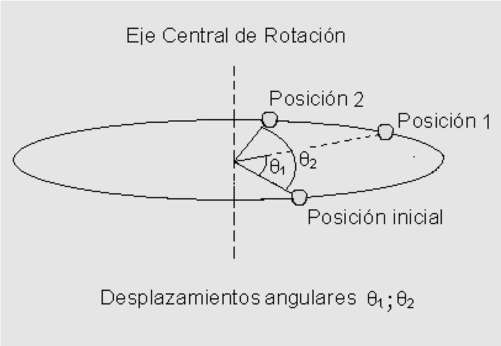


Figura 127. Desplazamiento angular θ de un cuerpo que describe un movimiento circular. Fuente: elaboración propia

En sí, el desplazamiento angular θ del cuerpo que describe una trayectoria circular es una medida de la rotación sufrida por este durante su movimiento, el cual, según [39], se define como la razón entre el arco de circunferencia *s* y el radio *r* de esta, respectivamente. Este se mide desde la posición inicial del cuerpo hasta el punto que define su posición final en su recorrido. El radian es la unidad de medida del desplazamiento angular y se define como el valor del ángulo subtendido por el cuerpo, cuando la longitud de arco de circunferencia recorrido por él en su trayectoria es igual a la longitud del radio de esta [44], tal como se muestra en la Fig. 128.

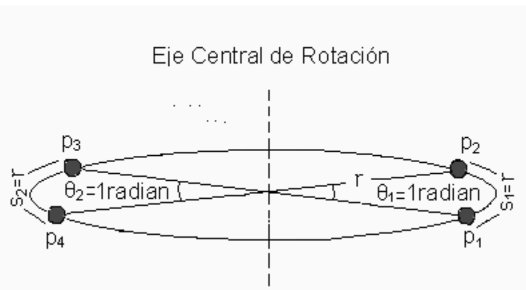


Figura 128. Los ángulos θ1 y θ2 en la figura tienen valores equivalentes a un radian, ya que los arcos subtendidos de longitud s_1 y s_2 son de cantidad igual al radio *r* de la circunferencia. Fuente: elaboración propia

De acuerdo con lo definido en [39], en la parte de arriba y lo expresado en [44] en torno a la definición de radian, se concluye que la ecuación matemática que permite determinar la medida en radianes de la magnitud del desplazamiento angular está dada por:

$$\Theta = \frac{s}{r} \tag{142}$$

Donde:

- θ: representa la magnitud del ángulo subtendido cuyo valor se expresa en radianes.
- s: representa la longitud del arco de circunferencia barrido.
- r: representa el radio de la trayectoria (circunferencia).

Por convención, se considera que el desplazamiento angular es negativo si el cuerpo rota en igual sentido a las manecillas del reloj, y positivo si rota en sentido contrario a estas (véanse las figuras 129 y 130).

Movimiento en Sentido igual a las manecillas del Reloj
(desplazamiento angular Θ Negativo)

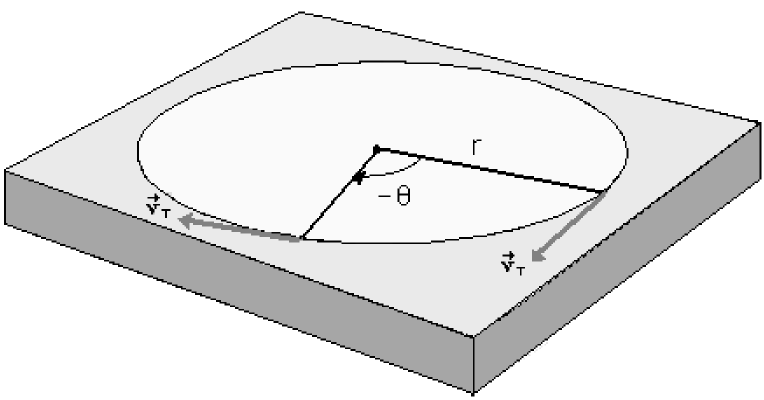


Figura 129. Cuando la rotación de un cuerpo va en sentido igual a las manecillas del reloj. Su desplazamiento angular es (–).
Fuente: elaboración propia

Movimiento Contrario a las Manecillas del Reloj
(desplazamiento angular Θ positivo)

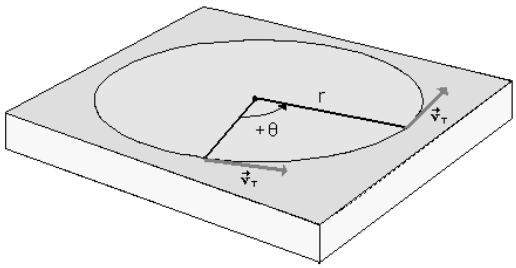


Figura 130. Cuando la rotación de un cuerpo va en sentido contrario a las manecillas del reloj. Su desplazamiento angular es (+). Fuente: elaboración propia

Además de los radianes, otras unidades de medidas muy comunes y utilizadas en física para expresar los valores del desplazamiento angular de un cuerpo que se encuentra en rotación son las revoluciones (rev) y los grados sexagesimales (º) [35]. Lo anterior evidencia la importancia que tiene conocer las equivalencias que existen entre los radianes, los grados y las revoluciones para realizar las posibles conversiones que se puedan presentar en los diversos ejercicios que se plantearán en el desarrollo de la unidad. Estos valores equivalentes entre estas unidades de medida de desplazamiento angular son:

$$\theta = 2\pi \text{ Rad.} = 360^{\circ} = 1 \text{ rev}$$

Es muy común encontrar expresado el desplazamiento angular de los cuerpos en rotación en terminos de π radianes. La Tabla VI muestra algunas equivalencias básicas entre radianes, grados y revoluciones.

Tabla XIII.

Desplazamientos angulares. expresados en radianes, grados y revoluciones

Radianes	Grados	Revolución
2π	360o	1rev
3π/4	270º	3/4 rev
π	180º	1/2 rev
π/2	90º	1/4 rev
π/4	45º	1/8 rev
π/3	60º	1/6 rev
π/6	30º	1/12 rev

Ejemplo 39.

El eje central de una licuadora gira sobre su propio eje un ángulo de 777º en dirección contraria a las manecillas del reloj. ¿Cuál es el valor de su desplazamiento ángular en radianes y en revoluciones?

Solución

Al hacer uso del factor de conversión $\frac{2\pi \text{rad}}{360^0}=1$ en la expresión $\theta=777^0$ tenemos que:

$$\Theta = 777^0(1) = 777^0\left(\frac{2\pi \text{rad}}{360^0}\right)$$

Si se realiza la multiplicacion y la división correspondientes en la expresión anterior, se obtiene el desplazamiento ángular expresado en radianes y en función de π:

$$\Theta = 4{,}316\pi \text{rad}$$

Ahora, para determinar el desplazamiento ángular en revoluciones se hace del factor de conversión:

$$\frac{1\text{rev}}{360^0}=1$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Theta = 777^0(1) = 777^0\left(\frac{1\text{rev}}{360^0}\right)= 2{,}158\text{rev}$$

Es decir, cuando el ángulo barrido por el eje de la licuadora es de 777^0, esta ha realizado 2,158 revoluciones.

Ejemplo 40.

Una barra delgada describe un movimiento circular uniforme alrededor de un eje central. Si la barra en cierto tiempo ha barrido un ángulo de 0,78 radianes y dos pequeños segmentos de ella presentan valores de radio r_1 = 20 m y r_2 = 24 m, determine las longitudes de arco s_1 y s_2 recorrido por cada uno de ellos (véase la Fig. 131).

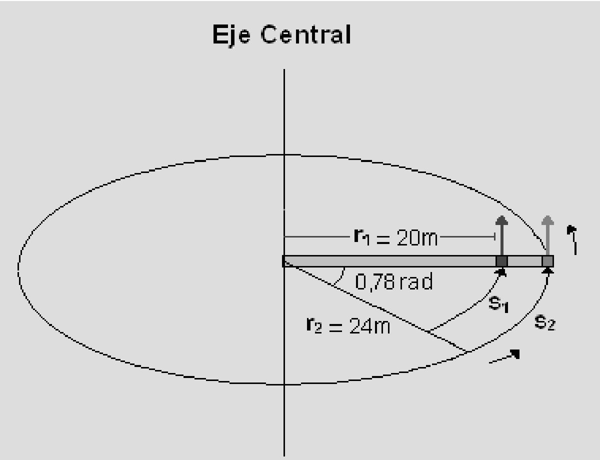


Figura 131. Barra que rota alrededor de un eje central y describe en cierto instante de tiempo un ángulo de 0,78 rad. Dos segmentos de la barra tienen radio r_1 = 20 m y r_2 = 24 m, y recorren respectivamente longitudes de arco s_1 y s_2. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para dar respuesta al interrogante planteado en esta pregunta se hace uso de (142), es decir:

$$\Theta = \frac{s}{r}$$

Donde:

$$r_1 = 20 \text{ m};\ r_2 = 24 \text{ m};\ \theta_1 = \theta_2 = 0{,}78 \text{ rad}$$

Al despejar *s* en (142) tenemos que:

$$s = r\theta$$

Si se reemplazan los valores correspondientes en la ecuación anterior se obtienen los valores de longitud de arcos s_1 y s_2 pedidos, así:

$$s_1 = (20 \text{ m})(0{,}78) = 15{,}6 \text{ m}$$

$$s_2 = (24\text{m})(0{,}78) = 18{,}72 \text{ m}$$

Se concluye de los resultados anteriores que el segmento de barra 2 recorre más distancia (longitud de arco *s*) que el segmento 1.

- **Velocidad angular media y velocidad angular instantánea**

Ahora bien, para la mayoría de las personas es conocido que las aspas de los abanicos pueden rotar con mayor o menor velocidad de acuerdo con el botón del tablero de control de velocidades que se oprima del aparato. Con el fin de caracterizar la velocidad rotacional de las aspas del abanico, o de cualquier otro cuerpo con este tipo de movimiento, se utilizan las llamadas “velocidad angular media” y la “velocidad angular instantánea”.

La velocidad angular media se define, según [43], para este tipo de movimiento, como el ángulo que el vector radial de posición describe en un segundo. Y de acuerdo con [39], como el cociente entre el desplazamiento angular y el tiempo empleado en el que se lleva a cabo este último. Lo expresado por estos autores citados permite concluir que la expresión matemática general que representa la velocidad angular media está dada por:

$$\overline{\vec{w}} = \frac{\vec{\Theta}_f - \vec{\Theta}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\Theta}}{\Delta t} \tag{143}$$

Donde:

- $\overline{\vec{w}}$: representa la velocidad angular media del cuerpo en movimiento rotacional.
- $\Delta\vec{\Theta}$: representa el desplazamiento angular del cuerpo en rotación.
- Δt: representa el intervalo de tiempo en el que el cuerpo realiza el desplazamiento angular $\Delta\vec{\Theta}$.
- $\vec{\Theta}_i$: representa el desplazamiento angular inicial del cuerpo en el tiempo t_i.
- $\vec{\Theta}_f$: representa el desplazamiento angular final del cuerpo en el tiempo t_f.
- t_i.: representa el tiempo inicial de observación del desplazamiento angular del cuerpo.
- t_f.: representa el tiempo final de observación del desplazamiento angular del cuerpo.

Como se puede observar en (143), la velocidad angular pertenece a las magnitudes vectoriales, ya que el desplazamiento angular del cual depende es un vector. Además, para el caso en particular, cuando el móvil parte del origen de coordenada polar, es decir, cuando el desplazamiento inicial del cuerpo $\vec{\Theta}_i = 0$, donde se considera también que el tiempo t_i=0, entonces la expresión matemática que permite determinar la velocidad angular media queda expresada de la siguiente manera:

$$\bar{\vec{\omega}} = \frac{\vec{\Theta}_f}{t_f} = \frac{\vec{\Theta}}{t} \tag{144}$$

Las unidades de medida más comunes y utilizadas para expresar los valores de velocidad angular son: el “rad/s”, que se lee radian sobre segundo, y la “rev/min” o (r.p.m), que se lee revoluciones por minuto. Por otra parte, se conoce que en la mayoría de los textos de fisica mecánica las ecuaciones vectoriales (143) y (144), las cuales definen la velocidad angular media se encuentran expresadas de forma escalar, tal como se muestra en [16], [26] y [44], de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{\Theta_f - \Theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} \tag{145}$$

$$\omega = \frac{\Theta}{t} \tag{146}$$

Así, (145) y (146) nos permiten determinar la magnitud de la velocidad angular del cuerpo en rotación, mas no su velocidad como tal.

De manera análoga a la velocidad lineal media del movimiento rectilíneo tratado en esta unidad, se define la magnitud de la velocidad angular media como el cociente entre la magnitud del desplazamiento angular total y el tiempo empleado en realizar este último, así:

$$\bar{\omega} = \frac{\Theta_T}{t_T} \tag{147}$$

Donde:

- $\bar{\omega}$: representa la magnitud de la velocidad angular media del cuerpo en rotación.

- Θ_T: representa la magnitud del desplazamiento angular total.
- t_T: representa el tiempo total empleado en llevar a cabo el desplazamiento angular total.

Así, (156) la encontramos expresada en la literatura de la siguiente manera [16], [39]:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{\Theta_T}{t_T} \tag{148}$$

Donde:

- $\bar{\omega}$: representa la magnitud de la velocidad angular media.
- $\Delta\Theta = \Theta_T$: representa la magnitud del desplazamiento angular total.
- $\Delta t = t_T$: representa el tiempo total empleado en realizar la magnitud del desplazamiento ángular.

Como se mencionó, la velocidad angular es un vector y la ecuación matemática vectorial que la relaciona con la velocidad lineal o tangencial y el vector radial de posición está dada, según [16], [40] y [45], por:

$$\vec{v}_T = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{149}$$

Es decir, la velocidad lineal o tangencial del cuerpo con movimiento circular es igual al producto cruz entre su vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ y su vector radial de posición $\vec{r}$ Su magnitud estaría dada por $V_T = \omega r \operatorname{sen}\theta$ (véase la Fig. 132).

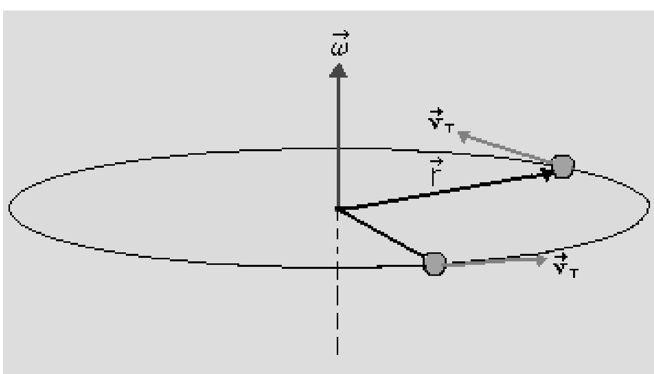


Figura 132. La velocidad lineal y tangencial $\vec{v}_T$ es perpendicular al plano formado por $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con lo que se muestra en la Fig. 132, y además si se tiene presente la regla de la mano derecha para el producto cruz entre vectores, tenemos que si el cuerpo se mueve en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj la velocidad angular apunta hacia arriba del plano formado por el vector radial $\vec{r}$, y el vector de velocidad lineal tangencial $\vec{v}_T$. Esta dirección, en la que apunta la velocidad angular, se considera positiva para este caso, es decir, a la velocidad angular se le coloca el signo (+), tal como se muestra en la Fig. 133.

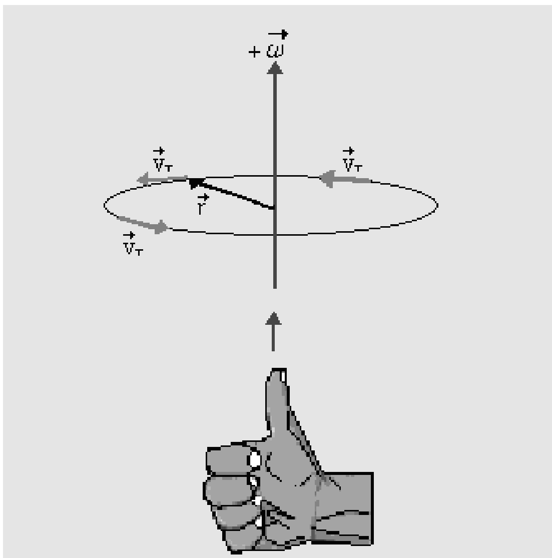


Figura 133. Cuando inicialmente tenemos la mano derecha abierta con el dedo pulgar en forma vertical y los otros cuatro dedos ubicados en la dirección de la velocidad tangencial, y a estos últimos empezamos a cerrarlos tratando de buscar el vector radial, observamos que la velocidad angular apunta en la misma dirección del dedo pulgar; para este caso su magnitud ω se considera positiva. Fuente: elaboración propia

Ahora, si el cuerpo gira en el mismo sentido de las manecillas del reloj, y, de igual manera como en el caso anterior, le aplicamos la regla de la mano derecha, observamos en la Fig. 134 que la velocidad angular apunta hacia abajo del plano formado por el vector radial y el vector de velocidad lineal. Para este caso la dirección de la velocidad angular se considera negativa y por eso se le coloca el signo (–).

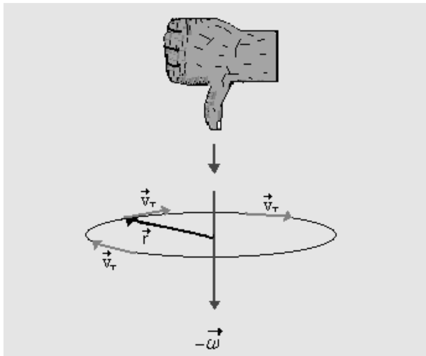


Figura 134. Velocidad lineal del cuerpo dirigiendose en la misma dirección de las agujas del reloj. La velocidad angular para este caso es negativa, ya que apunta hacia abajo. Fuente: elaboración propia

Con el fin de entender mejor los resultados obtenidos en las figuras 133 y 134, en las cuales se aplicó la regla de la mano derecha para obtener la dirección de la velocidad angular, se deben tener presente los siguientes aspectos del siguiente ejercicio: coloca la palma de tu mano derecha abierta en la dirección del vector de velocidad tangencial, luego ve cerrando tu mano (doblando los dedos en dirección de crecimiento del ángulo de rotación [45]), buscando con estos el vector radial de afuera hacia el centro, sin olvidarte de dejar siempre tu dedo pulgar de manera vertical. Finalmente, la dirección en la que apunte el dedo pulgar es en la que se orienta la velocidad angular $\vec{\omega}$ del cuerpo en rotación, tal como se muestra en la Fig. 135.

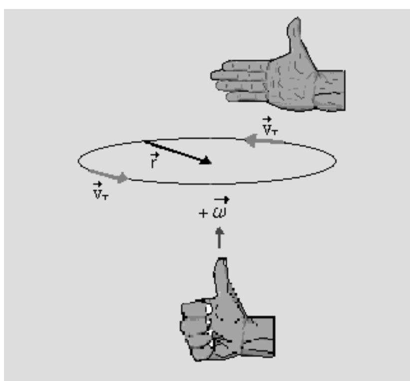


Figura 135. Para determinar la dirección del vector de velocidad angular se coloca la mano abierta con los dedos en la dirección del vector de velocidad tangencial (excepto el pulgar, el cual se mantiene vertical), luego se van cerrando los dedos en busca del vector radial; finalmente, la dirección en la que apunta el dedo pulgar es la dirección del vector de velocidad angular. Fuente: elaboración propia

Por lo general, en muchos de los ejercicios en los que se requiere calcular la magnitud de la velocidad angular de un cuerpo que rota con movimiento circular uniforme, y en el cual nos proporcionan información del valor de su periodo, para su determinación, según [39], se hace uso de la ecuación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{150}$$

Así, (150) se deduce de (146), en la cual se considera que cuando el tiempo t de rotación del cuerpo es igual a un periodo, es decir, t = T, su desplazamiento angular Θ es de 2πrad. Además, en muchos de los problemas de movimiento circular se encuentra que no dan razón del valor del periodo, pero sí del valor de la frecuencia de movimiento del cuerpo; entonces, se puede determinar la magnitud de su velocidad angular por medio de la ecuación:

$$\omega = 2\pi f \tag{151}$$

Donde f es la frecuencia de movimiento del cuerpo que describe la trayectoria circular.

Ejemplo 41.

Un niño jugando con las ruedas de su bicicleta hace girar a una de ellas y le imprime así un movimiento circular uniforme, de tal manera que esta da 10,5 vueltas en dos segundos. Si el radio r de la rueda es de 30 cm, calcula: a) la rapidez angular media de la rueda, b) su velocidad angular, c) su periodo de movimiento, d) su velocidad tangencial, y e) la aceleración centrípeta de un punto de la rueda. Véase la Fig. 136.

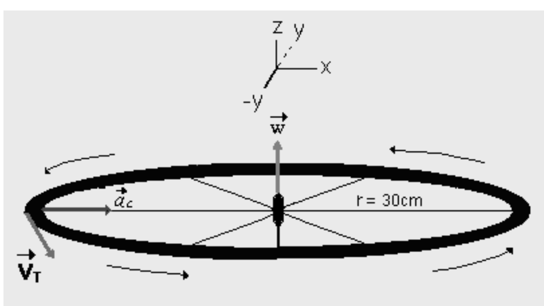


Figura 136. Rueda de bicicleta girando a rapidez tangencial constante debido a su movimiento circular uniforme. Esta presenta además una velocidad angular $\vec{\omega}$ en la dirección del eje z y una aceleración centrípeta $\vec{\alpha}_c$ en dirección radial. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar la magnitud de la velocidad angular media inicialmente se halla el ángulo barrido en las 10,5 vueltas (revoluciones). Para esto utilizamos el factor de conversión:

$$\frac{2\pi rad}{1rev}=1$$

Por tanto:

$$10{,}5rev(1) = (10{,}5rev)\left(\frac{2\pi rad}{1rev}\right)=21\pi rad$$

Es decir, el ángulo barrido θ a los dos segundos de movimiento de la rueda es de:

$$\Theta = 21\pi rad$$

Ahora, para determinar la rapidez angular media de la rueda se hace utiliza (156), es decir,

$$\bar{\omega} = \frac{\Theta_T}{t_T}$$

Donde:

$$\Theta_T = 21\pi rad \ ; \ t_T = 2s$$

Al reemplazar los valores anteriores de ángulo y tiempo en (156) se obtiene la magnitud de velocidad angular media de la rueda, así:

$$\omega = \bar{\omega} = \frac{21\pi rad}{2s} = (10{,}5)\pi rad/s$$

b. De la Fig. 136 se deduce que la dirección de la velocidad angular media de la rueda está en la dirección z, es decir, su vector unitario de dirección es $\hat{k}$; por lo anterior, su velocidad está dada por:

$$\overleftarrow{\bar{w}} = [10{,}5\pi \frac{rad}{s}]\hat{k}$$

c. Para determinar el periodo de movimiento de la rueda se hace uso de (133), es decir:

$$T = \frac{t}{n}$$

Donde:

$$n = 10,5 \text{ y } t = 2\ s$$

Al reemplazar los valores anteriores en (133), se obtiene el valor del periodo de la rueda, así:

$$T = \frac{2s}{10,5} = 0,19s$$

d) La velocidad tangencial de la rueda se determina mediante (137), es decir:

$$\vec{v}_T = \frac{2\pi r}{T}(-Sen\Theta\hat{I} + Cos\Theta\hat{J})$$

Donde:

$$\Theta = 21\pi rad = \pi \ ; \ T = 0,19s \ ; \ r = 30cm$$

Al reemplazar los valores anteriores en (137), tenemos que:

$$\vec{v}_T = \frac{2(3.1416)(30cm)}{0,19s}(-Sen\pi\hat{I} + Cos\pi\hat{J})$$

Si se realizan las operaciones correspondientes en la expresión anterior, se obtiene, finalmente, la velocidad tangencial de la rueda (recuerde $sen\pi = 0$):

$$\vec{v}_T = 992,08cm/s(-\hat{J})$$

e) Para determinar la aceleración centrípeta de un punto de la rueda se hace uso de (140), es decir:

$$\vec{\alpha}_c = \overrightarrow{W} \ X \ \vec{V}_T$$

Donde:

$$\vec{\omega} = [(10,5)\pi rad / s]\hat{K} \ ; \ \vec{v}_T = 992,08cm/s(-\hat{J})$$

Al reemplazar los vectores anteriores de velocidad angular y tangencial en (140), tenemos:

$$\vec{\alpha}_c = \left[(10,5)\pi rad / s\hat{k}\right] X \left[992,08cm/s(-\hat{J})\right]$$

Si se realizan la multiplicación de las componentes escalares de los vectores indicada en la parte de arriba, y conociendo además que $\hat{K}X(-\hat{J}) = \hat{I}$, se obtiene que la aceleración centrípeta de un punto de la rueda en t = 2 s es de:

$$\vec{\alpha}_c = 32725{,}68\text{cm/s}^2\hat{I}$$

Ejemplo 42.

La rueda de una motocicleta se mueve con una rapidez tangencial constante V_T; si a los 2 s de su movimiento un observador registra que el ángulo subtendido por uno de sus puntos exteriores es de 400º, y que la distancia radial *r* de su centro al punto es de 25 cm, calcule: a) el número de revoluciones o vueltas dada por el punto de la rueda a los dos segundos de su movimiento, b) el periodo de movimiento de la rueda, c) la velocidad tangencial del punto exterior de la rueda a los dos segundos, d) su velocidad angular a los dos segundos, y e) su aceleración centrípeta a los dos segundos (véase la Fig. 137).

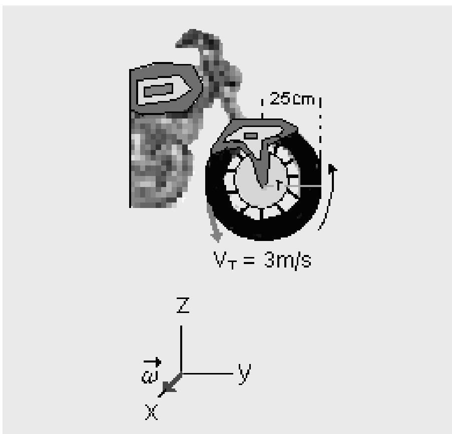


Figura 137. Rueda de motocicleta moviendose a rapidez tangencial constante de 3 m/s. La distancia de uno de sus puntos exteriores a su centro se encuentra a 0,25 cm. La velocidad angular del punto se encuentra en dirección *x*. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar el número de revoluciones dada por el punto exterior de la rueda, a los dos segundos de su movimiento, se hace uso del factor de conversión:

$$\frac{1\text{rev}}{360^0} = 1$$

Entonces:

$$400^0\,(1) = 400^0\left(\frac{1\,\text{rev}}{360^0}\right) = 1\frac{40}{360}\,\text{rev} = 1\frac{1}{9}\,\text{rev}$$

Es decir:

$$n = 1\frac{1}{9}\,\text{rev} = \frac{10}{9}\,\text{vueltas}$$

b. Para determinar el periodo del punto exterior de la rueda se hace uso de (133), es decir:

$$T = \frac{t}{n}$$

Donde:

$$t = 2s;\; n = \frac{10}{9}\text{vueltas}$$

Al reemplazar los valores anteriores de tiempo y números de vueltas en (133), tenemos que:

$$T = \frac{2s}{\frac{10}{9}\text{vueltas}} = 1{,}8s$$

c. Para determinar la velocidad tangencial del punto exterior de la rueda a los dos segundos de su movimiento, se hace uso de (137), es decir:

$$\vec{v}_T = \frac{2\pi r}{T}\,(-\text{Sen}\theta\hat{J} + \text{Cos}\theta\hat{K})$$

Donde:

$$r = 25cm;\; T = 1{,}8s$$

Si se reemplazan los valores anteriores de radio y periodo en la ecuación (137) tenemos:

$$\vec{v}_T = \frac{2(3{,}1416)(25cm)}{1{,}8s}(-\text{Sen}400^0\hat{J} + \text{Cos}400^0\hat{K})$$

Al desarrollar las operaciones de multiplicación y división indicadas y, al mismo tiempo, se determina el valor del seno y el coseno del ángulo de 400^0 en la expresión anterior, se obtiene:

$$\vec{v}_T = 87{,}26\text{cm/s}\ (-0{,}64\hat{J} + 0{,}76\hat{K})$$

Al multiplicar la magnitud de la velocidad tangencial por el vector unitario indicado en el paréntesis se obtiene que la velocidad del punto exterior de la rueda está dada por la expresión:

$$\vec{v}_T = -55{,}84\text{cm/s}\hat{J} + 66{,}31\ \text{cm/s}\hat{K}$$

d. Con el fin de determinar la magnitud de la velocidad angular media, inicialmente se pasa a radianes el ángulo de 400^0 barrido por el punto a los dos segundos de su movimiento. Para esto utilizamos el factor de conversión:

$$\frac{2\pi\text{rad}}{360^0} = 1$$

Por tanto:

$$400^0\ (1) = 400^0\left(\frac{2\pi\text{rad}}{360^0}\right) = 2{,}22\,\pi\text{rad}$$

Es decir, el ángulo barrido θ en radianes del punto a los dos segundos de su movimiento es de:

$$\Theta = 2{,}22\,\pi\text{rad}$$

Luego, para determinar la rapidez angular media de la rueda tomamos (156), es decir:

$$\bar{\omega} = \frac{\Theta_T}{t_T}$$

Donde:

$$\Theta_T = 2{,}22\,\pi\text{rad}$$

Al reemplazar los valores anteriores de ángulo y tiempo en (156) obtenemos, finalmente, la magnitud de velocidad angular media del punto de la rueda, así:

$$\omega = \bar{\omega} = \frac{2{,}22\pi\text{rad}}{2\text{s}} = 1{,}11\pi\text{rad}/\text{s}$$

De la Fig. 137 se deduce que la dirección de la velocidad angular media de la rueda está en la dirección x, es decir, su vector unitario de dirección es $\hat{I}$. Por lo anterior, su velocidad angular media está dada por:

$$\vec{\omega} = \vec{\bar{\omega}} = 1{,}11\pi \text{rad/s}$$

e. Para determinar la aceleración centrípeta del punto de la rueda se hace uso de (140), es decir:

$$\vec{\alpha}_c = \overrightarrow{W} \text{ X } \vec{V}_T$$

Donde:

$$\vec{\omega} = 1{,}11\pi \text{rad}/\vec{S} \ ; \ \vec{v}_T = -\ 55{,}84\text{cm/s}\hat{J} + 66{,}31\text{cm/s}\hat{K}$$

Al reemplazar los vectores anteriores de velocidad angular y tangencial en (140) tenemos que:

$$\vec{\alpha}_c = \left[1{,}11\pi \text{rad/s}\hat{I}\right] \text{ X } \left[-55{,}84\text{cm/s}\hat{J} + 66{,}31\text{cm/s}\hat{K}\right]$$

Si se realiza la multiplicación de las componentes escalares de los vectores indicada en la parte de arriba, y se conoce, además, que $\hat{I}X\hat{J} = \hat{K}$ y $\hat{I}X\hat{K} = -\hat{J}$, se obtiene que la aceleración centrípeta del punto de la rueda en t = 2 s es de:

$$\vec{\alpha}_c = -\ 61{,}98\pi \text{cm/s}^2\hat{J} - 73{,}60\pi \text{cm/s}^2\hat{K}$$

Ahora bien, la velocidad angular media de un móvil no siempre nos indica la velocidad angular instantánea del cuerpo en movimiento circular en cada punto de su trayectoria y en todo tiempo. Solo para el caso particular en el cual la velocidad angular del cuerpo permanece constante esta puede darnos con precisión cómo es el movimiento del cuerpo en cada punto de su recorrido. Lo expresado solo se puede observar en el movimiento circular uniforme, en el que la velocidad angular media es igual a la velocidad angular instantánea en todo punto del recorrido; para otro caso no.

Así, un concepto muy importante en física mecánica, y el cual permite solucionar el problema de obtener información sobre la velocidad angular de un cuerpo en particular en cada instante de tiempo a medida que se mueve en su trayectoria circular, se conoce como "velocidad angular instantánea". Según [40], la velocidad angular instantánea es de carácter vectorial y su dirección se encuentra sobre el eje de giro del cuerpo en movimiento, siempre y cuando este último no varíe su orientación en el tiempo. De acuerdo con [16] y [39], su determinación analítica se puede realizar por medio del límite cuando Δt →0 de la velocidad media, es decir:

$$\vec{\omega}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\Theta}}{\Delta t} \qquad (152)$$

- $\vec{\omega}_{inst}$: representa la velocidad angular instantánea del cuerpo en movimiento circular o rotacional.
- $\Delta \vec{\Theta}$: representa la función de desplazamiento angular de una línea del cuerpo rígido.
- Δt: representa el intervalo de tiempo en el que se realiza el desplazamiento angular de la línea del cuerpo rígido.
- $\frac{\Delta \vec{\Theta}}{\Delta t}$: es la función general de velocidad angular media.

Así, (152) lleva a concluir que la velocidad angular instantánea es la derivada con respecto al tiempo de la función de desplazamiento angular del cuerpo en movimiento rotacional [16]. Por tanto, desde el punto de vista matemático, la expresión que representa la velocidad angular instantánea esta dada por:

$$\vec{\omega}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\Theta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\Theta}}{dt}$$

Es decir:

$$\vec{\omega}_{inst} = \frac{d\vec{\Theta}}{dt} = \vec{\Theta}' \qquad (153)$$

Donde $\vec{\Theta}'$ representa la primera derivada de la función de desplazamiento angular del móvil, es decir:

$$\vec{\Theta}' = \frac{d\vec{\Theta}}{dt}$$

De esta manera, (153) la encontramos expresada de forma escalar en la literatura de la siguiente forma:

$$\omega_{inst} = \frac{d\Theta}{dt} = \Theta' \qquad (154)$$

Así, (154) permite determinar la magnitud de la velocidad ángular instantánea del cuerpo en rotación.

Ejemplo 43.

Un motociclista se mueve sobre una trayectoria circular de radio r = 10 m. La moto del motociclista presenta una función escalar de desplazamiento angular dependiente del tiempo, definida por la expresión $\theta(t) = (2\ rad/s^2)t^2 - (3\ rad/s)t$. Calcule: a) la función de velocidad angular del motociclista en función del tiempo, b) la velocidad angular de la moto en t = 1 s, t = 2 s y t = 1,5 s. Véase la Fig. 138.

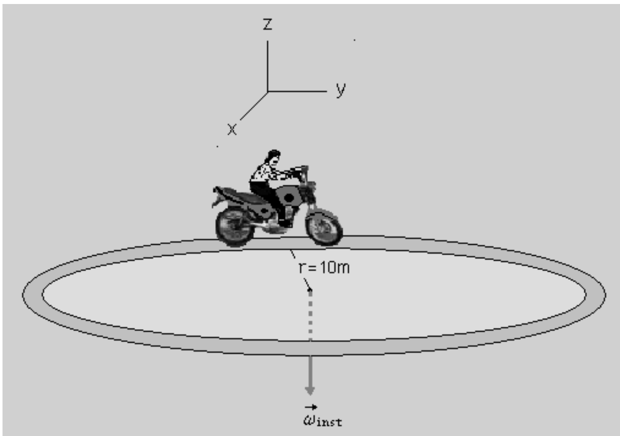


Figura 138. Motociclista se mueve en una trayectoria circular de radio r = 10 cm, con magnitud de desplazamiento angular dada por la expresión $\theta(t) = (2\ rad/s^2)t^2 - (3\ rad/s)t$. La moto presenta velocidad angular variable debido al cambio en su magnitud a medida que el tiempo transcurre. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Inicialmente, se halla la función escalar de velocidad angular al hacer uso de (154), es decir:

$$\omega_{inst} = \frac{d\Theta}{dt} = \Theta'$$

Donde:

$$\theta(t) = (2rad/s^2)t^2 - (3rad/s)t.$$

Al derivar la función escalar de desplazamiento angular con respecto al tiempo se obtiene la función escalar de magnitud de velocidad ángular, así:

$$\omega_{inst} = \frac{d\Theta}{dt} = (4rad/s^2)t - 3rad/s$$

De la Fig. 138 se deduce que la dirección de la velocidad angular se encuentra en la dirección del eje *z* negativo, es decir, que el vector unitario de velocidad angular es $\hat{k}$, por tanto, la función de velocidad angular del motociclista queda expresada por:

$$\vec{\omega}_{inst} = \left[(4rad/s^2)t - 3rad/s\right](-\hat{K})$$

b. Al reemplazar t = 1 s en la función de velocidad angular del motociclista determinado en la parte de arriba, tenemos:

$$\vec{\omega}_{inst} = \left[(4rad/s^2)(1s) - 3rad/s\right](-\hat{K})$$

Si se realizan las operaciones indicadas y se simplifican términos semejantes en la expresión anterior, se obtiene el vector de velocidad angular para t = 1s, así:

$$\vec{\omega}_{inst} = 1rad/s(-\hat{K})$$

Para t = 2 s tenemos:

$$\vec{\omega}_{inst} = \left[(4rad/s^2)(2s) - 3rad/s\right](-\hat{K}) = 5rad/s(-\hat{K})$$

Para t = 1,5 s tenemos:

$$\vec{\omega}_{inst} = \left[(4rad/s^2)(1,5s) - 3rad/s\right](-\hat{K}) = 3rad/s(-\hat{K})$$

Observe que en este caso el motociclista se mueve en la misma dirección de las manecillas del reloj, por tanto, su vector unitario de velocidad angular, el cual le determina la dirección, es negativo.

b) Movimiento circular uniformemente acelerado (m.c.u.a.)

Si se toma el ejemplo de un abanico que inicialmente se encuentra apagado, y un instante después lo conectamos a la energía eléctrica, observaremos que sus aspas empiezan a incrementar de manera uniforme su velocidad angular desde cero hasta obtener un determinado valor; esto último ocurre en cierto espacio de tiempo. Este primer ejemplo permite afirmar que las aspas del abanico, durante este valor de tiempo, presentan una aceleración angular. Es así como en nuestra vida cotidiana encontramos muchos casos de cuerpos en rotación que presentan aceleración angular. Un segundo ejemplo puede ser el disco de esmeril de una pulidora, el cual, a fin de alcanzar su velocidad angular de operación aumenta de manera progresiva la magnitud de su velocidad y de forma continua. De los ejemplos anteriores se puede concluir que siempre que la magnitud de la velocidad angular de un cuerpo en movimiento rotacional cambie de valor en el tiempo, es decir, si en el tiempo inicial $t_{.i}$ presenta una magnitud de velocidad angular $\omega_{i,}$ y en el tiempo final t_f pasa a una magnitud de velocidad angular $\omega_{f,}$ siendo diferentes ambas magnitudes de velocidad ($\omega_i \neq \omega_f$), entonces se puede decir que el cuerpo presenta aceleración angular. Dentro del m.c.u.a se encuentran la aceleración angular media y la aceleración angular instantánea.

- **Aceleración angular media y aceleración angular instantánea**

Así, en el movimiento circular uniformemente acelerado, el observable físico conocido como "aceleración angular media" se define como la razón de cambio entre el incremento de velocidad angular y el intervalo de tiempo en el que este se lleva a cabo. De acuerdo con [16], la expresión matemática vectorial que la define se representa a través de la siguiente ecuación:

$$\bar{\vec{\alpha}} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Donde:

- $\bar{\vec{\alpha}}$: representa la aceleración angular media del cuerpo con movimiento circular.
- $\vec{\omega}_i$: representa la velocidad angular inicial del cuerpo en el tiempo t_i.
- $\vec{\omega}_f$: representa la velocidad angular final del cuerpo en el tiempo t_f.
- t_i: representa el tiempo inicial del movimiento del cuerpo en rotación.
- t_f: representa el tiempo final del movimiento del cuerpo en rotación.
- $\Delta\vec{\omega}$: representa el cambio o incremento en la velocidad angular.
- Δt: representa el intervalo de tiempo en el que ocurre el cambio o incremento en la velocidad angular.

Así, (155) indica que la aceleración angular es una magnitud de carácter vectorial, de dirección y sentido igual a la variación de velocidad angular. En la Fig. 139 se ilustra lo expresado.

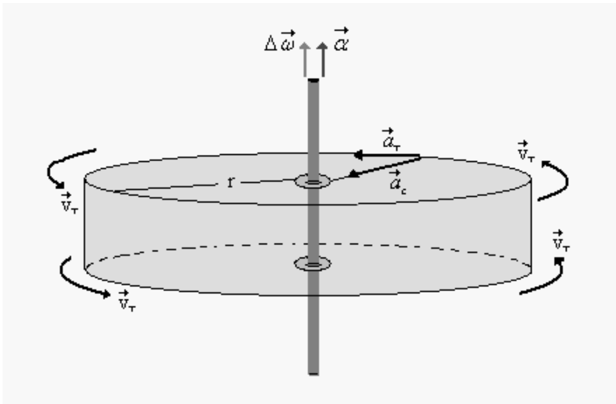


Figura 139. En el movimiento uniformemente acelerado se conoce que la aceleración angular es de carácter vectorial, así como que presenta la misma dirección y sentido de la variación de velocidad angular. Además, en este tipo de movimiento el móvil presenta tanto aceleración centrípeta como aceleración tangencial. Fuente: elaboración propia

Generalmente, (155) —que permite determinar el vector constante de aceleración angular media— la encontramos en la mayoría de los textos de física mecánica expresada de forma escalar de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{156}$$

Donde los términos presentes en (156) son las magnitudes tanto de la aceleración angular como de las velocidades angulares, e igualmente los valores de tiempo inicial y final. La unidad común de medida utilizada para expresar la magnitud de la aceleración angular es el rad/s^2. Además, cuando un cuerpo en rotación presenta una magnitud de aceleración angular de 2 rad/s^2, esto significa que la magnitud de la velocidad angular del cuerpo varía dos radianes por segundo por cada segundo transcurrido.

Ejemplo 44.

Las hélices de un helicóptero aceleran desde el reposo (t = 0) hasta alcanzar una rapidez angular de 42,2 rev/min(r.p.m) en 0,6 s. Calcule: a) la magnitud de su aceleración angular; b) la aceleración angular de las hélices. Véase la Fig. 140.

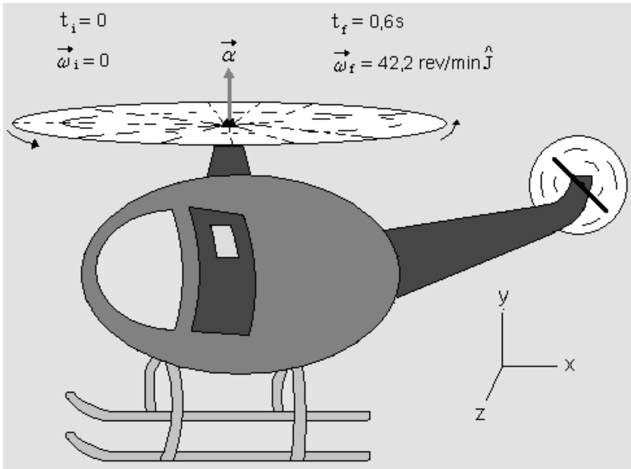


Figura 140. Hélices de un helicóptero acelerando desde el reposo. Cuando transcurren 0,6 s estas presentan una magnitud de velocidad angular de 42,2 rev/min. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar la magnitud de la aceleración angular de las hélices del helicóptero se hace uso de (156) es decir:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$$

De la Fig. 140 se deduce que en $t_i = 0$; $\omega_i = 0$, y que en $t_f = 0,6s$; $\omega_f = 42,2$revi/min ; ahora, para convertir la magnitud de la velocidad angular final de las hélices del helicóptero que están expresadas en revoluciones por minuto a radianes sobre segundo se utilizan los siguientes factores de conversión:

$$\frac{1\text{min}}{60\text{s}} = 1 \; y \; \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}} = 1$$

Al tener en cuenta lo expresado anteriormente tenemos que:

$$\omega_f = 42,2\text{rev/min}\left(\frac{1\text{min}}{60\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}}\right)$$

Si se simplifica términos semejantes y se realizan las operaciones indicadas de multiplicación y división en la expresión anterior, se obtiene:

$$\omega_f = 1,40\pi\text{rad/s}$$

Al reemplazar los valores correspondientes de tiempo y de magnitud de velocidad angular en (156) se determina la magnitud de la aceleración angular de las hélices del helicóptero, así:

$$\alpha = \frac{1{,}40\pi \text{rad/s} - 0}{0{,}6\text{s} - 0} = 2{,}33\pi \text{rad/s}^2$$

b. De la Fig. 140 observamos que la dirección de la aceleración angular se encuentra en la dirección del eje, la cual es la misma dirección de la velocidad angular de las hélices del helicóptero. Por tanto, esta queda expresada de la siguiente manera:

$$\vec{\alpha} = 2{,}33\pi \text{rad/s}^2 \hat{J}$$

Ejemplo 45.

Las aspas de un molino de viento giran inicialmente a una rapidez angular de 3rad/s. Si a los ocho segundos de movimiento presentan una rapidez angular de 32 rad./s, ¿cuál es la aceleración angular media de estas? Véase la Fig. 141.

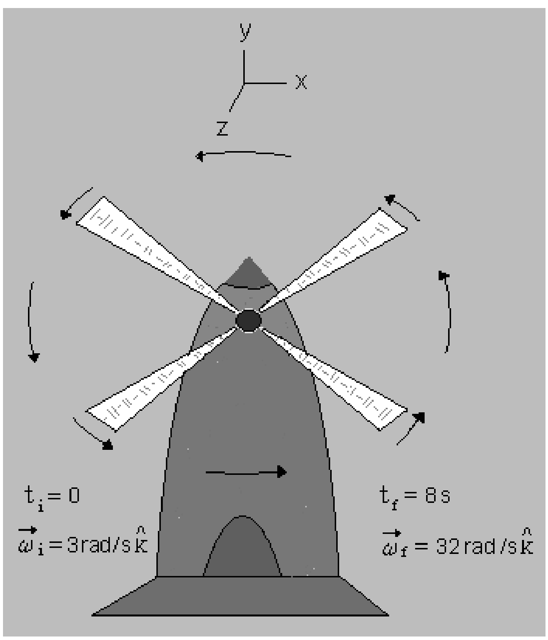


Figura 141. Las aspas de un molino de viento se mueven inicialmente a una rapidez angular de 3 rad/s, después de transcurrido un tiempo de 8 s se mueven a 32 rad/s. Lo anterior implica que las aspas se encuentran aceleradas. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para determinar la aceleración angular media de las aspas del molino se hace uso de (155), es decir:

$$\bar{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i}{t_f - t_i}$$

Donde, para $t_i = 0s \rightarrow \vec{\omega}_i = 3rad/s\hat{K}$ y para $t_f = 8s \rightarrow \vec{\omega}_f = 32rad/s\hat{K}$.

Al reemplazar los valores de tiempo y los vectores de velocidad angular anteriores en (155) tenemos que:

$$\vec{\alpha} = \frac{32rad/s\hat{K} - 3rad/s\hat{K}}{8s - 0s}$$

Al realizar las operaciones indicadas en la expresión anterior se obtiene el vector de la aceleración angular media de las aspas del molino de viento, así:

$$\vec{\alpha} = 3{,}625rad/s^2\hat{K}$$

Ahora bien, de acuerdo con [16] y [39], la aceleración angular instantánea es la derivada con respecto al tiempo de la función de velocidad angular instantánea, es decir, la expresión matemática que la representa está dada por la ecuación:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (157)$$

Las unidades de medida de la aceleración angular son los rad/s^2.

En el movimiento circular se pueden presentar los siguientes tipos de aceleraciones: el primero es el movimiento circular uniformemente acelerado, en el que la velocidad angular del cuerpo que rota incrementa su magnitud de manera uniforme y se representa por la sigla m.c.u.a, y el segundo caso es el movimiento circular uniformemente retardado, en el cual el cuerpo disminuye también su velocidad angular de manera uniforme. La sigla que lo representa está dada por m.c.u.r. De lo expresado anteriormente se puede afirmar que estos dos movimientos presentan aceleración angular constante.

Ahora bien, el hecho de que el cuerpo con movimiento circular uniformemente acelerado cambie su velocidad angular en el tiempo conlleva a que su velocidad tangencial también varíe. Lo anterior quiere decir que en este caso el cuerpo presenta una nueva aceleración diferente a la aceleración centrípeta conocida como "aceleración tangencial", la cual se representa por medio de la ecuación matemática vectorial:

$$\vec{\alpha}_T = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} \tag{158}$$

Donde:

- $\vec{\alpha}_T$: representa la aceleración tangencial del cuerpo en rotación.
- $\vec{S}$: representa la función vectorial de desplazamiento lineal del cuerpo.
- $\frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$: es la segunda derivada de la función vectorial de desplazamiento con respecto al tiempo.

Así, (158) la encontramos expresada en los diferentes textos de fisica mecánica de forma escalar de la siguiente manera:

$$\alpha_T = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{159}$$

Donde:

- α_T: representa la magnitud de la aceleración tangencial del cuerpo en rotación.
- S: representa la función escalar de desplazamiento lineal del cuerpo.
- $\frac{d^2s}{dt^2}$: es la segunda derivada de la función escalar de desplazamiento lineal con respecto al tiempo.

Ahora, de (142) se deduce que $s = r.\theta$.

Al derivar con respecto al tiempo la función escalar *s* anterior, y conociendo que *r* es constante, tenemos:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\Theta}{dt}$$

Sin embargo, de (156) se conoce que $\frac{d\Theta}{dt} = \omega_{inst}$, por tanto, tenemos que:

$$\frac{ds}{dt} = r\omega \tag{160}$$

Al realizar la segunda derivada de *s* con respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

Si se tiene en cuenta (160), se obtiene la expresión:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}\,(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt}$$

Como $\frac{d\omega}{dt} = \alpha =$ magnitud de aceleración angular, se obtiene finalmente la expresión:

$$\frac{d^2s}{dt^2}= r\alpha \tag{161}$$

Ahora, al reemplazar (161) en (159), se obtiene que la magnitud de la aceleración tangencial queda determinada por medio de la expresión [16]:

$$\alpha_T = r\alpha \tag{162}$$

De acuerdo con [17], el vector de aceleración tangencial de cualquier cuerpo que presente un movimiento circular uniformemente acelerado está dada por medio del producto cruz entre el vector de aceleración angular y el vector radial de posición del cuerpo, así:

$$\vec{\alpha}_T = \vec{\alpha}x\vec{r} \tag{163}$$

El hecho de conocer que un cuerpo que presenta un movimiento circular uniformemente acelerado tiene dos tipos de aceleraciones, es decir, aceleración centrípeta y aceleración tangencial, nos lleva a deducir que la ecuación vectorial general que nos permite determinar su aceleración total $\vec{\alpha}$, al tener presente las ecuaciones (140) y (163), es:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_C + \vec{\alpha}_T = \vec{w}\ x\ \vec{v}_T + \vec{\alpha}x\vec{r} \tag{164}$$

Ejemplo 46.

La rueda giratoria de un parque de diversión presenta un radio r = 40 cm. Esta es girada desde el reposo y origen de coordenadas, alcanzando en un tiempo t = 4 seg, una rapidez angular ω = 1,5 rad/s, sufriendo además una magnitud de desplazamiento angular θ = 3 rad. Calcule: a) la aceleración centrípeta de un punto exterior de la rueda en t = 4 s, b) su aceleración tangencial, c) su aceleración neta, d) la magnitud de cada una de las aceleraciones pedidas. Véase la Fig. 142.

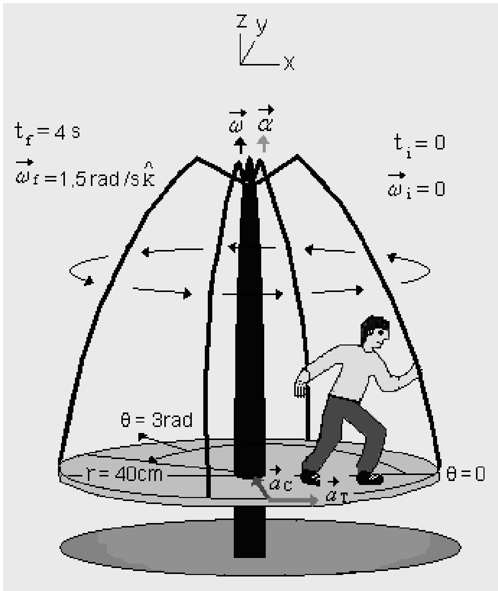


Figura 142. Rueda giratoria de radio 40 cm partiendo del reposo. A los cuatro segundos de su movimiento esta presenta una magnitud de velocidad angular de 1,5 rad/s y sufre una magnitud de desplazamiento angular de 3 rad. La persona en la rueda presenta tanto aceleración centrípeta como aceleración tangencial. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar la aceleración centrípeta del punto exterior de la rueda giratoria se hace uso de (140), es decir:

$$\vec{\alpha}_c = \vec{w} \times \vec{v}_T$$

Antes de utilizar (140), primero se determina la velocidad tangencial $\vec{v}_T$ por medio de la (149), es decir:

$$\vec{v}_T = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Con:

$$\vec{\omega} = 1{,}5\text{rad/s}\hat{K} \ ; \ \vec{r} = 40\text{cm}\left[\text{Cos}(3\text{rad})\hat{I} + \text{Sen}(3\text{rad})\hat{J}\right]$$

Al hallar el seno y el coseno del angulo de 3 rad y multiplicar por la magnitud del vector radial se obtiene $\vec{r}$ expresado en sus componentes vectoriales:

$$\vec{r} = -\,39{,}56\text{cm}\hat{I} + 5{,}64\text{cm}\hat{J}$$

Al reemplazar en (149) los vectores de velocidad angular y radial se obtiene:

$$\vec{v}_T = \left[(1{,}5\text{rad/s})\hat{K}\right] X \left[-39{,}56\text{cm}\hat{I} + 5{,}64\text{cm}\hat{J}\right]$$

Si se realiza el producto cruz indicado se obtiene, finalmente, que la velocidad tangencial del punto exterior de la rueda es:

$$\vec{v}_T = -8{,}46\text{cm/s}\hat{I} - 59{,}34\text{cm/s}\hat{J}$$

Al reemplazar en (140) los vectores de velocidad angular y de velocidad tangencial, tenemos:

$$\vec{\alpha}_c = \left[(1{,}5\text{rad/s})\hat{K}\right] X \left[-8{,}46\text{cm/s}\hat{I} - 59{,}34\text{cm/s}\hat{J}\right]$$

Si se realiza el producto cruz indicado en la expresión anterior se obtiene, finalmente, la aceleración centrípeta pedida:

$$\vec{\alpha}_c = 89{,}01\text{cm/s}^2\hat{I} - 12{,}69\text{cm/s}^2\hat{J}$$

b. Para determinar la aceleración tangencial del punto exterior de la rueda giratoria se hace uso de (163), es decir:

$$\vec{\alpha}_t = \vec{\alpha} \, x \, \vec{r}$$

Antes se determina la aceleración angular promedio del punto al hacer uso de (155), es decir:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i}{t_f - t_i}$$

Donde:

$$\text{para } t_i = 0 \rightarrow \vec{\omega}_i = 0 \text{ y para } t_f = 4\text{s} \rightarrow \vec{\omega}_f = 1{,}5\text{rad/s}\hat{K}$$

Si se reemplazan los valores anteriores en (155) y operando se obtiene:

$$\vec{\alpha} = \frac{1{,}5\text{rad/s}\hat{K} - 0}{4\text{s} - 0} = 0{,}375\text{rad/s}^2\hat{K}$$

Al sustituir en (163) los vectores de aceleración angular y radial tenemos:

$$\vec{\alpha}_T = \left[(0{,}375\text{rad/s}^2)\hat{K}\right] X \left[-39{,}56\text{cm}\hat{I} + 5{,}64\text{cm}\hat{J}\right]$$

Si se desarrolla el producto cruz en la expresión anterior se obtiene, finalmente, la aceleración tangencial:

$$\vec{\alpha}_T = -2{,}11\text{cm/s}^2\hat{\imath} - 14{,}83\text{cm/s}2\hat{\jmath}$$

c. Para determinar la aceleración neta del punto exterior de la rueda giratoria se hace uso de (164), es decir:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_C + \vec{\alpha}_T$$

Al reemplazar en la ecuación anterior los resultados obtenidos en los encisos a) y b) para la aceleración centrípeta y tangencial se obtiene:

$$\vec{\alpha} = \left(89{,}01\text{cm/s}^2\hat{\imath} - 12{,}69\text{cm/s}^2\hat{\jmath}\right) + \left(-2{,}11\text{cm/s}^2\hat{\imath} - 14{,}83\text{cm/s}^2\hat{\jmath}\right)$$

Si se realiza la suma vectorial indicada en la expresión anterior, es decir, se reducen términos semejantes, finalmente se obtiene la aceleración total del punto exterior de la rueda giratoria:

$$\vec{\alpha} = 86{,}9\text{cm/s}^2\hat{\imath} - 27{,}52\text{cm/s}^2\hat{\jmath}$$

d. La magnitud de la aceleración centrípeta $\vec{\alpha}_C$ está dada por:

$$\alpha_C = \sqrt{(89{,}01\text{cm/s}^2)^2 + (-12{,}69\text{cm/s}^2)^2} = 89{,}91\text{cm/s}^2$$

La magnitud de la aceleración tangencial $\vec{\alpha}_T$ es de:

$$\alpha_T = \sqrt{(-2{,}11\text{cm/s}^2)^2 + (-14{,}83\text{cm/s}^2)^2} = 14{,}98\text{cm/s}^2$$

La magnitud de la aceleración neta $\vec{\alpha}$ se determina así:

$$\alpha = \sqrt{(86{,}9\text{cm/s}^2)^2 + (-27{,}52\text{cm/s}^2)^2} = 91{,}15\text{cm/s}^2$$

4) Analogía entre el movimiento rectilíneo y el movimiento circular

Debido a que el movimiento rectilíneo y el movimiento circular (angular o rotacional) guardan cierta semejanza desde el punto de vista físico, esto quiere decir que los símbolos matemáticos que representan los observables físicos involucrados en cada uno de ellos también la guarden.

En la Tabla VII se muestran los símbolos con los cuales se identifican los observables físicos característicos del móvil en cada uno de los tipos de movimiento que este pueda presentar, los cuales fueron citados en el parrafo anterior.

Tabla XIV

Símbolos de los observables físicos utilizados en el movimiento circular y el lineal

Observable Físico	**Movimiento circular (Magnitud observable)**	**Movimiento rectilíneo (Magnitud observable)**
Tiempo	T	T
Desplazamiento	θ	(Δr) o (d)
Velocidad inicial	ω_i	v_i
Velocidad final	ω_f	v_f
Aceleración	α	α

Según [39], a causa de la existencia de semejanza entre el movimiento circular con aceleración angular constante y el movimiento rectilíneo con aceleración constante, se deduce que las ecuaciones matemáticas vectoriales indicadas para solucionar los problemas que se presenten para el primer movimiento, deben por analogía física presentar la misma estructura matemática que para el segundo movimiento, es decir que:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t \tag{165}$$

$$\vec{\Theta} = \vec{\Theta}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \tag{166}$$

$$2\vec{\alpha}\circ(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0) = \vec{\omega}_f \circ \vec{\omega}_f - \vec{\omega}_0 \circ \vec{\omega}_0 \tag{167}$$

Donde:

- t: representa el tiempo empleado en realizar el desplazamiento final $\vec{\Theta}$.
- $\vec{\Theta}$: representa el desplazamiento angular final del cuerpo en rotación.
- $\vec{\Theta}_0 = \vec{\Theta}_i$: representa el desplazamiento angular inicial del cuerpo en rotación.
- $\vec{\omega}_f = \vec{\omega}$: representa la velocidad angular final del cuerpo en rotación.
- $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_f$: representa la velocidad angular inicial del cuerpo en rotación.
- $\vec{\alpha}$: representa la aceleración angular constante del cuerpo en rotación.

En el caso particular para el cual el desplazamiento angular inicial $\vec{\Theta}_0 = 0$, en t = 0, (166) y (167) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\vec{\Theta} = \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2$$

$$2\vec{\alpha} \circ \vec{\Theta} = \vec{\omega}_f \circ \vec{\omega}_f - \vec{\omega}_0 \circ \vec{\omega}_0$$

Generalmente, (165), (166) y (167), para el caso particular cuando $\vec{\Theta}_0 = 0$, en t = 0, se encuentran expresadas escalarmente en los diferentes textos de física mecánica de la siguiente manera:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\Theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$2\alpha\Theta = \omega^2 - \omega_0^2$$

Así se puede observar, por ejemplo, en [17].

Ejemplo 47.

Un disco de esmeril parte del origen del sistema de coordenadas y gira con una magnitud de aceleración angular constante de 6 rad/s^2. Si su rapidez angular inicial es de 4 rad/s en el instante t = 0s, Calcule: a) la magnitud del desplazamiento angular en t = 10 s, y b) la magnitud de la velocidad angular a los 10 s de su movimiento. Véase la Fig. 143.

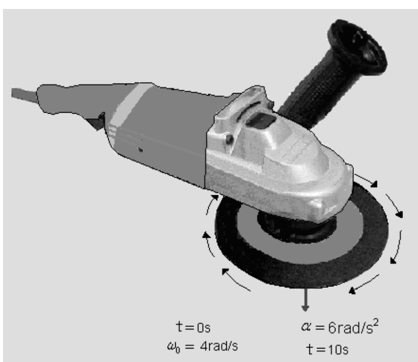


Figura 143. Disco de esmeril partiendo desde el origen de coordenadas en t = 0 s, presenta una magnitud de velocidad angular inicial de 4 rad/s y magnitud de aceleración angular constante de 6 rad/s^2. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar la magnitud del desplazamiento angular del disco de esmeril se hace uso de (171), es decir:

$$\Theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Donde:

$$\omega_0 = 4 \text{ rad/s} \; ; \; \alpha = 6\text{rad/s}^2 \; ; \; t = 10\text{s}$$

Al reemplazar los valores anteriores de rapidez angular, magnitud de aceleración angular y tiempo en (171), se tiene:

$$\Theta = (\,4\text{rad/s})(10\text{s}) + \frac{1}{2}(6\text{rad/s}^2)(10\text{s})^2$$

Si se desarrollan las operaciones indicadas en la expresión anterior y se simplifican términos semejantes, se obtiene la magnitud del desplazamiento angular, así:

$$\Theta = 340\text{rad}$$

b. Para determinar la magnitud de la velocidad angular del disco a los 10 s de movimiento se hace uso de (170), es decir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Donde:

$$\omega_0 = 4\text{rad/s} \; ; \; \alpha = 6\text{rad/s}^2 \; ; \; t = 10\text{s}$$

Al sustituir los valores anteriores de rapidez angular inicial, magnitud de aceleración angular y tiempo en (170), tenemos que:

$$\omega = 4\text{rad/s} + (6\text{rad/s}^2)\,(10\text{s})$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la expresión anterior y se simplifican términos semejantes, se obtiene la rapidez angular del disco de esmeril a los 10 s de su movimiento, así:

$$\omega = 64\text{rad/s}$$

Ejemplo 48.

Un engranaje empieza su movimiento rotacional desde el reposo y origen de coordenadas con aceleración angular de 2 rad/s^2, Calcule: a) su velocidad angular a los 20 s de movimiento, y b) su desplazamiento angular a los 20 s. Véase la Fig. 144.

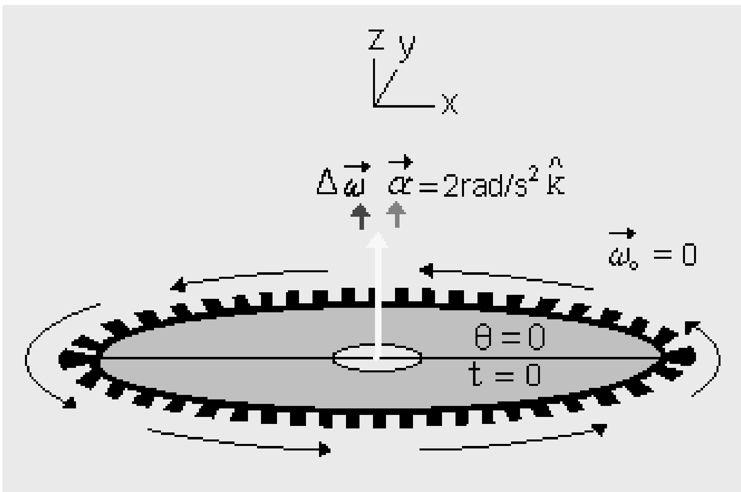


Figura 144. Engranaje moviéndose desde el reposo y origen de coordenadas en dirección contraria a las manecillas del reloj. Este mantiene una aceleración angular constante de 2 rad/s^2. Fuente: elaboración propia

Solución

a. Para determinar la velocidad angular del engranage a los veinte segundos de movimiento se hace uso de (165), es decir:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$$

Donde:

$$\vec{\omega}_0 = 0\hat{K}\ ;\ \vec{\alpha} = 2\text{rad/s}^2\hat{K}\ ;\ t = 20\text{s}$$

Al reemplazar el valor de tiempo y los vectores de velocidad angular inicial y de aceleración angular anteriores, en (165) tenemos:

$$\vec{\omega}_f = 0\hat{K} + \left(2\text{rad/s}^2\ \hat{K}\right)(20\text{s})$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la expresión anterior y se simplifican términos semejantes, se obtiene la velocidad angular final del engranaje a los veinte segundos de su movimiento:

$$\vec{\omega}_f = 40\text{rad/s}\hat{K}$$

b. Para determinar el desplazamiento angular del engranaje a los veinte segundos de movimiento se hace uso de (168), es decir:

$$\vec{\Theta} = \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2$$

Donde:

$$\vec{\omega}_0 = 0\hat{K}\ ;\ \vec{\alpha} = 2\text{rad/s}^2\hat{K}\ ;\ t = 20\text{s}$$

Al sustituir el valor de tiempo y los vectores de velocidad angular inicial y de aceleración angular anteriores en (168), tenemos:

$$\vec{\Theta} = \left(0\hat{K}\right)(20\text{s}) + \frac{1}{2}\left(2\text{rad/s}^2\hat{K}\right)(20\text{s})^2$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la expresión anterior y se simplifican términos semejantes, se obtiene el vector de desplazamiento angular del disco de esmeril a los veinte segundos de su movimiento, y se obtiene:

$$\vec{\Theta} = 400\text{rad}\hat{K}$$

Ejemplo 49.

La rueda de un alfarero tiene radio r = 20 cm. Si en el tiempo t = 0 s, un punto externo de esta se encuentra en el origen de coordenadas y presenta una magnitud de velocidad angular inicial ωo =3 rad/s, y considerando que a la rueda se le imprime una magnitud de aceleración angular constante α = 3 rad/s^2, calcule: a) el tiempo que emplea el punto para alcanzar una magnitud de desplazamiento angular de 6000 rad, b) su velocidad angular en este tiempo, c) la velocidad tangencial para este tiempo, d) su aceleración centrípeta, e) su aceleración tangencial, y f) su aceleración neta. Véase la Fig. 145.

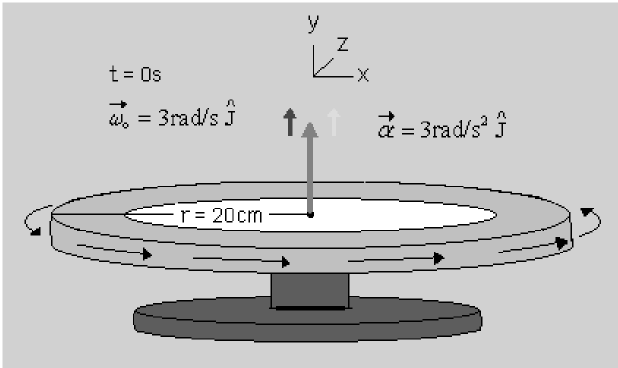


Figura 145. Rueda de alfarero de radio de 20 cm. En el tiempo t = 0 s esta presenta una magnitud de velocidad angular de 3 rad/s y una magnitud de aceleración angular constante de 3 rad/s^2.
Fuente: elaboración propia

Solución

a. Con el fin de determinar el tiempo empleado por el punto externo para sufrir una magnitud de desplazamiento angular de 6000 rad se hace uso de (171), es decir:

$$\Theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Donde:

$$\omega_0 = 3rad/s\ ;\ \alpha = 3rad/s^2\ ;\ \Theta = 6000\ rad$$

Al sustituir los valores anteriores de magnitudes de velocidad angular inicial, aceleración angular y desplazamiento angular en (171), tenemos:

$$6000rad = (3rad/s)t + \frac{1}{2}\ (3rad/s^2)t^2$$

Si se multiplica la ecuación anterior por dos y se transponen términos se obtiene que:

$$(3rad/s^2)t^2 + (6rad/s)t - 12000rad. = 0$$

La ecuación anterior es una ecuación cuadrática, la cual se puede resolver haciendo uso de la ecuación general:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\alpha c}}{2\alpha}$$

Donde:

$$\alpha = 3\text{rad/s}^2 \; ; \; b = 6\text{rad/s} \; ; \; c = -12000\,\text{rad}$$

Al reemplazar los valores de arriba en la ecuación general anterior tenemos que:

$$t = \frac{-6\text{rad/s} \pm \sqrt{(6\text{rad/s})^2 - 4(3\text{rad/s}^2)(-12000\text{rad})}}{2(3\text{rad/s}^2)}$$

Si se desarrollan las operaciones indicadas en el radical se obtiene:

$$t = \frac{-6\text{rad/s} \pm 379{,}52\text{rad/s}}{6\text{rad/s}^2}$$

Como el tiempo no puede ser negativo en la ecuación de arriba, solo se toma el signo positivo, de modo que se obtiene el tiempo pedido así:

$$t = \frac{-6\text{rad/s} + 379{,}52\text{rad/s}}{6\text{rad/s}^2} = 62{,}25\text{s}$$

b. Para determinar la velocidad angular final $\vec{\omega}_f$ del punto exterior en el tiempo $t = 62{,}25$ s se hace uso de (165), es decir:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$$

Con:

$$\vec{\omega}_0 = 3\text{rad/s}\hat{\jmath} \; ; \; \vec{\alpha} = 3\text{rad/s}^2\hat{\jmath} \; ; \; t = 62{,}25\text{s}$$

Al sustituir los vectores de velocidad angular inicial y aceleración angular, así como el valor de tiempo en (165), tenemos:

$$\vec{\omega}_f = 3\text{rad/s}\hat{\jmath} + (3\text{rad/s}^2\hat{\jmath})(62{,}25\text{s})$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la parte de arriba, finalmente se obtiene la velocidad angular del punto exterior de la mesa a los 62,25 s, así:

$$\vec{\omega}_f = 189{,}75\text{rad/s}\hat{\jmath}$$

c. Para determinar la velocidad tangencial del punto exterior de la mesa en $t = 62{,}25$ s se hace uso de (149), es decir:

$$\vec{v}_T = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Inicialmente, se determina el vector de posición radial $\vec{r}$ del punto para este tiempo, así:

$$\vec{r} = 20\text{cm}\left[\cos(6000\text{rad})\hat{I} + \text{sen}(6000\text{rad})\hat{K}\right]$$

Al determinar el valor del coseno y seno para el ángulo de 6000 rad, y al multiplicar por la magnitud del vector radial se obtiene:

$$\vec{r} = 18{,}07\text{cm}\hat{I} - 8{,}55\text{cm}\hat{K}$$

Si se sustituyen la velocidad angular determinada en el inciso (b) y el vector radial en (149) tenemos:

$$\vec{v}_T = (189{,}75\text{rad/s}\hat{J})\ X\ (18{,}07\text{cm}\hat{I} - 8{,}55\text{cm}\hat{K})$$

Al desarrollar el producto cruz indicado en la parte de arriba se obtiene la velocidad tangencial del punto exterior pedida, así:

$$\vec{v}_T = (-\ 3428{,}78\text{cm/s})\hat{K} + (-1622{,}36\text{cm/s})\hat{I}$$

d. Para determinar la aceleración centrípeta del punto exterior de la mesa se hace uso de (140), es decir:

$$\vec{\alpha}_c = \vec{w}\ x\ \vec{v}_T$$

Al reemplazar en (140) los vectores de velocidad angular y velocidad tangencial determinados en los incisos a) y b) tenemos:

$$\vec{\alpha}_c = (189{,}75\text{rad/s}\hat{J})\ X\ \left[(-3428{,}78\text{cm/s})\hat{K} + (-1622{,}36\text{cm/s})\hat{I}\right]$$

Si se desarrolla el producto cruz expresado en la ecuación anterior, se obtiene la aceleración centrípeta pedida del punto exterior de la mesa, así:

$$\vec{\alpha}_c = (-650611\text{cm/s}^2)\hat{I} + (307842{,}81\text{cm/s}^2)\hat{K}$$

e. Para determinar la aceleración tangencial del punto exterior de la mesa se hace uso de (163), es decir:

$$\vec{\alpha}_T = \vec{\alpha} x \vec{r}$$

Con:

$$\vec{\alpha} = 3\text{rad/s}^2\hat{J}\ ;\ \vec{r} = 18{,}07\text{cm}\hat{I} - 8{,}55\text{cm}\hat{K}$$

Al reemplazar los vectores anteriores de aceleración angular y radial en (162) tenemos:

$$\vec{\alpha}_T = (3\text{rad/s}^2\hat{J})\ X\ (18{,}07\text{cm}\hat{I} - 8{,}55\text{cm}\hat{K})$$

Al realizar el producto cruz indicado en la parte de arriba, se obtiene el vector de aceleración tangencial pedido del punto exterior de la mesa:

$$\vec{\alpha}_T = (-54{,}21\text{cm/s}^2)\hat{K} + (-25{,}65\text{cm/s}^2)\hat{I}$$

f. Para determinar la aceleración neta del punto exterior de la mesa se hace uso de (164), es decir:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_C + \vec{\alpha}_T$$

Al reemplazar los vectores de aceleración centrípeta y tangencial obtenidos en los incisos d) y e), en (164), tenemos:

$$\vec{\alpha} = \left[(-650611\text{cm/s}^2)\hat{I} + (307842{,}81\text{cm/s}^2)\hat{K}\right] + \left[(-54{,}21\text{cm/s}^2)\hat{K} + (-25{,}65\text{cm/s}^2)\hat{I}\right]$$

Al agrupar términos semejantes en la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{\alpha} = \left[(-650611\text{cm/s}^2)\hat{I} + (-25{,}65\text{cm/s}^2)\hat{I}\right] + \left[(-54{,}21\text{cm/s}^2)\hat{K} + (307842{,}81\text{cm/s}^2)\hat{K}\right]$$

Si se reducen los términos semejantes en los corchetes se obtiene la aceleración neta pedida:

$$\vec{\alpha} = (-650636{,}65\text{cm/s}^2)\hat{I} + (307788{,}6\text{cm/s}^2)\hat{K}$$

E. Resumen

A continuación, se sintetizan aspectos relevantes de la unidad en los siguientes puntos:

- *La cinemática*. Estudia y explica las características físicas que presentan los cuerpos que se encuentran en estado de reposo o movimiento, sin tener en cuenta las causas que lo generan.

Conceptos fundamentales:

- *Partícula*. Cuerpo considerado de masa relativamente pequeña, a causa de las medidas locales que presente de sus dimensiones, o por la posición relativa que tiene con respecto a un sistema de referencia en particular.
- *Movimiento de un objeto*. La palabra *movimiento*, en física, se refiere al cambio relativo de posición que sufre un cuerpo con respecto a otro en el transcurso del tiempo.
- *Trayectoria*. Conjunto de puntos sucesivos e imaginarios por los cuales pasa un cuerpo para ir del punto inicial donde se encuentra a otro punto equidistante del primero.
- *Sistema de referencia*. Punto, objeto o cuerpo seleccionado, con el fin de realizar mediciones de observables físicos con respecto a él, además de describir el movimiento o posición de otros cuerpos.
- *Posición de un cuerpo*. Está definida por la distancia y la orientación que tenga el cuerpo con respecto a un punto, llamado este último "punto de referencia" o "sistema de referencia". Entendiéndose además por orientación la dirección del vector que le define la posición al cuerpo en el espacio, en un plano o sobre una línea recta, donde se ubica. Este vector es llamado "vector de posición".
- *Vector de posición*. Vector que describe en cualquier instante de tiempo la posición de un cuerpo en particular.
- *Vector de desplazamiento*. Indica el cambio de posición de un cuerpo a medida que transcurre el tiempo. La ecuación de desplazamiento espacial de un cuerpo en movimiento esta dado por: $\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\hat{I}+(y_f-y_i)\hat{J}+(z_f-z_i)\hat{K}$ (vector desplazamiento espacial)
- *Distancia total recorrida*. Distancia equivalente a la longitud total de la trayectoria seguida por el cuerpo para ir de un punto a otro.

- *Velocidad*. Se define como la razón de cambio entre el vector de desplazamiento y el tiempo. Es una magnitud de carácter vectorial. Las ecuaciones matemáticas vectoriales unidimensionales que la definen son:

$$\vec{V} = \vec{X} / t \text{ (Ec. para velocidad constante)} \qquad (1)$$

$$\vec{V} = d\vec{X} / dt \text{ (Ec. para velocidad variable)} \qquad (2)$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \text{ (Ec. para velocidad media)} \qquad (3)$$

- *Rapidez*. Físicamente representa la magnitud del vector de velocidad. Es decir, esta es de carácter escalar. Las ecuaciones matemáticas escalares unidimensionales que la definen están dadas por:

$$V = X/t \text{ (Ec. para rapidez constante)} \qquad (1)$$

$$V = dX/dt \text{ (Ec. para rapidez variable)} \qquad (2)$$

$$\bar{v} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{t} \text{ (Ec. para rapidez media)} \qquad (3)$$

- *Movimiento rectilíneo uniforme*. Es un movimiento que se realiza a velocidad constante, cuya trayectoria seguida por el cuerpo es una línea recta. Las ecuaciones matemáticas unidimensionales vectorial y escalar que lo definen son:

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{V}.t \text{ (forma vectorial)} \qquad (1)$$

$$X = X_0 + V.t \text{ (forma escalar)} \qquad (2)$$

- *Movimiento acelerado*. Un cuerpo en particular describe un movimiento acelerado si su velocidad varía a medida que el tiempo transcurre.

Para reconocer que un cuerpo está variando su velocidad se deben tener en cuenta las siguientes características:

- Que el móvil varíe la magnitud de su velocidad, es decir, su rapidez.
- Que el móvil varíe la dirección de su velocidad, es decir, sus ángulos de dirección espacial.
- Que el móvil al mismo tiempo varíe tanto su rapidez como la dirección de la velocidad.

La aceleración está definida por la ecuación matemática vectorial:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (1)$$

- *Movimiento uniformemente acelerado*. Es aquel movimiento en el cual la velocidad varía, pero la aceleración permanece constante, es decir, a intervalos de tiempos iguales el cambio en la velocidad es el mismo. Dentro de este tipo de movimiento se enmarca el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.
- *Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*. Es un movimiento que, como su nombre lo indica, la trayectoria del cuerpo en movimiento es una línea recta, lo que muestra que solo su magnitud (rapidez) está variando en el tiempo, más no su dirección.

Los siguientes temas pertenecen al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: movimiento horizontal uniformemente acelerado, movimiento vertical uniformemente acelerado (caída libre de un cuerpo, lanzamiento vertical de un cuerpo hacia abajo, lanzamiento vertical de un cuerpo hacia arriba), movimiento de un cuerpo en un plano inclinado sin rozamiento, movimiento de un cuerpo en un plano inclinado de superficie homogénea con rozamiento.

Las ecuaciones matemáticas vectoriales unidimensionales que se pueden utilizar en la solución de problemas para los diferentes tipos de movimientos mencionados en el párrafo anterior son:

Ecuaciones para el movimiento horizontal uniformemente acelerado y movimiento en un plano inclinado:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{\alpha}t \tag{1}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \tag{2}$$

$$2\vec{\alpha} \circ (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{v}_f \circ \vec{v}_f - \vec{v}_0 \circ \vec{v}_0 \tag{3}$$

Ecuaciones para el movimiento vertical uniformemente acelerado (caída libre, lanzamiento vertical hacia arriba y hacia abajo):

$$\vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} + \vec{g}t \tag{1}$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{2}$$

$$2\vec{g} \circ (\vec{h} - \vec{h}_0) = \vec{v}_{fy} \circ \vec{v}_{fy} = \vec{v}_{0y} \circ \vec{v}_{0y} \tag{3}$$

- *Movimiento en dos dimensiones o sobre un plano*. Es aquel cuya trayectoria descrita por el cuerpo en movimiento es una línea curva, en la cual esta última se encuentra enmarcada en un plano, es decir, el cuerpo se mueve en dos direcciones diferentes al mismo tiempo. Alguno de los movimientos pertenecientes al movimiento en un plano son: el semiparabólico y el parabólico.

- *Movimiento semiparabólico.* Su trayectoria es una semiparábola.
- *Movimiento parabólico.* Su trayectoria es una parábola.
- Las ecuaciones vectoriales y escalares bidimensionales generales, que permiten resolver problemas relacionados con este tipo de movimiento, son:

$$\vec{r} = \left[x_0 + (v_0\cos\theta_0)t\right]\hat{\imath} + \left[y_0 + (v_0\operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{\jmath} \text{ ó}$$

$$\vec{r} = (x - x_0)\hat{\imath} + \left[y_0 + (\tan\theta_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\left[\frac{g}{(v_0\cos\theta_0)^2}\right](x - x_0)^2\right]\hat{\jmath} \tag{1}$$

$$\vec{v} = (v_0\cos\theta_0)\hat{\imath} + (v_0\operatorname{sen}\theta_0 - gt)\hat{\jmath} \tag{2}$$

$$2\vec{g} \circ (\vec{y} - \vec{y}_0) = \left[(v_0\operatorname{sen}\theta_0 - gt)\hat{\jmath}\right] \circ \left[(v_0\operatorname{sen}\theta_0 - gt)\hat{\jmath}\right] - \left[(v_0\operatorname{sen}\theta_0)\hat{\jmath}\right] \circ \left[(v_0\operatorname{sen}\theta_0)\hat{\jmath}\right] \tag{3}$$

$$t_s = \frac{v_0\operatorname{sen}\theta_0}{g} \tag{4}$$

$$t_v = \frac{2v_0\operatorname{sen}\theta_0}{g} \tag{5}$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}(2\theta_0)}{g} \tag{6}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta_0}{2g} \tag{7}$$

- *Movimiento circular.* Todo cuerpo en movimiento que presente como trayectoria una circunferencia, se dice que tiene un movimiento de tipo circular. Dentro de este encontramos el movimiento circular uniforme y el movimiento circular uniformemente acelerado.
- *Movimiento circular uniforme.* Es aquel movimiento circular en el que la magnitud del vector de velocidad tangencial (rapidez) del móvil se mantiene constante, mientras su dirección varía en el tiempo.

Las ecuaciones que nos permiten determinar, respectivamente, observables físicos tales como el periodo, la frecuencia, la velocidad tangencial y su magnitud (rapidez), la aceleración centrípeta y su magnitud, el desplazamiento angular y su magnitud, la velocidad angular y su magnitud, la velocidad angular media y su magnitud, en el movimiento circular uniforme son:

$$T = \frac{t}{n} \qquad (1)$$

$$f = \frac{n}{t} \qquad (2)$$

$$f = \frac{1}{T} \qquad (3)$$

$$\vec{v}_T = \frac{2\pi r}{T}\left(-\text{Sen}\theta\hat{\imath} + \text{Cos}\theta\hat{\jmath}\right) \qquad (4)$$

$$v_T = \frac{2\pi r}{T} \qquad (5)$$

$$\vec{\alpha}_c = \vec{w} \text{ x } \vec{v}_T \qquad (6)$$

$$\alpha_c = \frac{v_T^2}{r} \qquad (7)$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} \qquad (8)$$

$$\omega = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (9)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (10)$$

$$\bar{\vec{\omega}} = \frac{\vec{\theta}_f}{t_f} \qquad (11)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_T}{t_T} \qquad (12)$$

- *Velocidad angular instantánea.* Cuando el cuerpo en movimiento circular varía su rapidez tangencial en el tiempo, su velocidad angular también lo hace. Desde el punto de vista matemático la velocidad angular instantánea se determina por medio de la ecuación:

$$\vec{\omega}_{inst} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\theta}' \qquad (1)$$

- *Movimiento circular uniformemente acelerado.* Es aquel movimiento circular en el que el móvil varía tanto la magnitud de su velocidad tangencial como su dirección. Lo anterior conlleva a que el cuerpo presente dos aceleraciones: una centrípeta debida al cambio de dirección, y la otra tangencial al variar su rapidez.

Las ecuaciones que nos permiten determinar los observables físicos tales como la aceleración angular y su magnitud, la aceleración tangencial y su magnitud y su aceleración total en el movimiento circular uniformemente acelerado son:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2)$$

$$\vec{\alpha}_T = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \vec{\alpha} X \vec{r} \quad (3)$$

$$\alpha_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = r\alpha \quad (4)$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_C + \vec{\alpha}_T = \vec{w} \text{ x } \vec{v}_T + \vec{\alpha} \text{ x } \vec{r} \quad (5)$$

1) Analogía entre el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y el movimiento circular uniformemente acelerado

Dado que el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y el movimiento circular uniformemente acelerado presentan las mismas características de movimiento en lo que tiene que ver con la aceleración, se deduce por analogía que las ecuaciones vectoriales que permiten solucionar problemas del segundo tipo de movimiento mencionado están dadas por:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha} t \quad (1)$$

$$\vec{\Theta} = \vec{\Theta}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2 \quad (2)$$

$$2\vec{\alpha} \circ (\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0) = \vec{\omega}_f \circ \vec{\omega}_f - \vec{\omega}_0 \circ \vec{\omega}_0 \quad (3)$$

F. Ejercicios de aplicación

1) Problemas de vector de posición

a. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado del avión que se muestra en la Fig. 146.

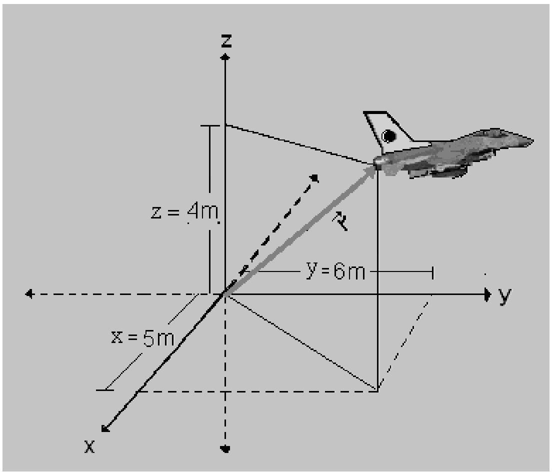


Figura 146. Avión de combate moviéndose en el espacio. Fuente: elaboración propia

b. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado de la mariposa que se muestra en la Fig. 147. Fuente: elaboración propia

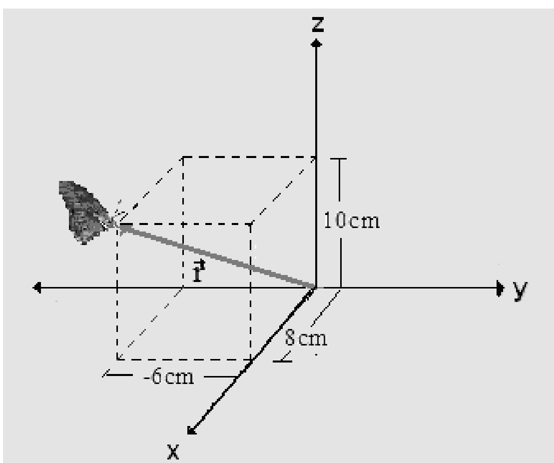


Figura 147. Mariposa moviéndose en el espacio tridimensional. Fuente: elaboración propia

c. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado del ave que se muestra en la Fig. 148.

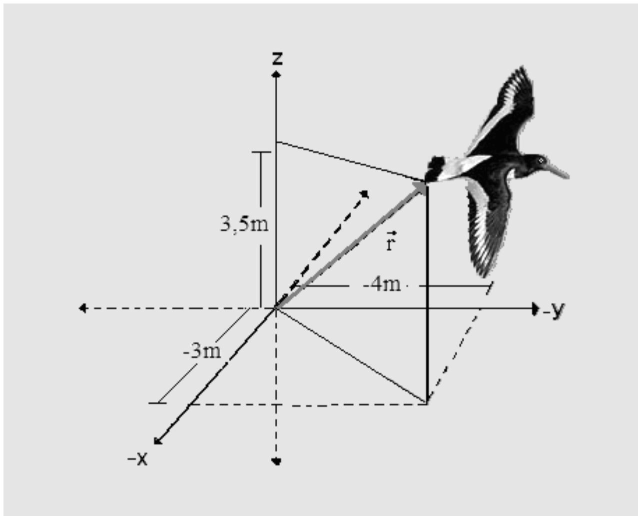


Figura 148. Ave moviéndose en el espacio tridimensional. Fuente: elaboración propia

d. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado de la persona que se mueve sobre el plano inclinado que se muestra en la Fig. 149.

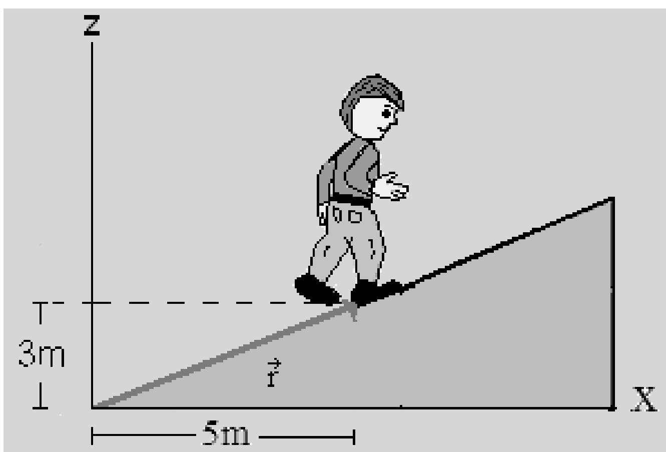


Figura 149. Hombre moviéndose hacia arriba del plano inclinado. Fuente: elaboración propia

e. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado de la persona que se mueve sobre el plano inclinado que se muestra en la Fig. 150.

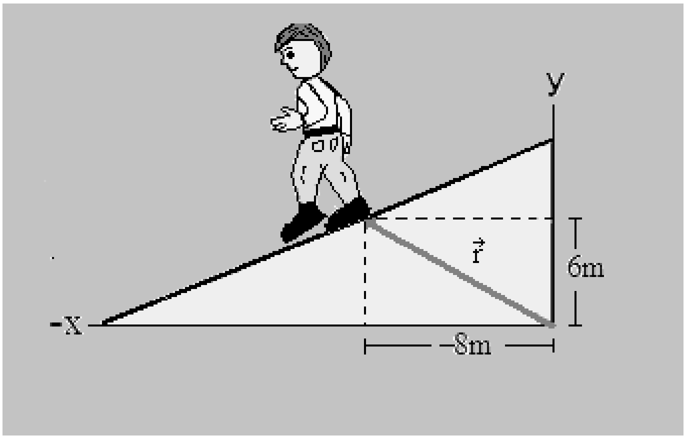


Figura 150. Hombre moviendose hacia abajo de un plano inclinado.
Fuente: elaboración propia

f. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado de la persona que se mueve sobre el plano inclinado que se muestra en la Fig. 151.

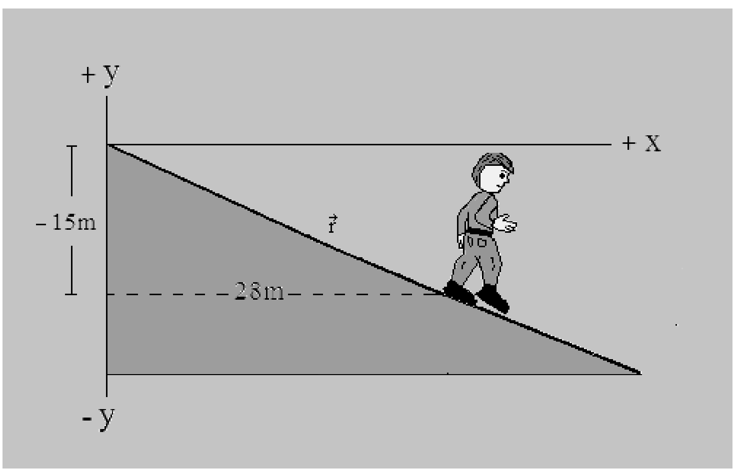


Figura 151. Persona descendiendo por la superficie de un plano inclinado.
Fuente: elaboración propia

g. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado del atleta que se mueve sobre el eje negativo x que se muestra en la Fig. 152.

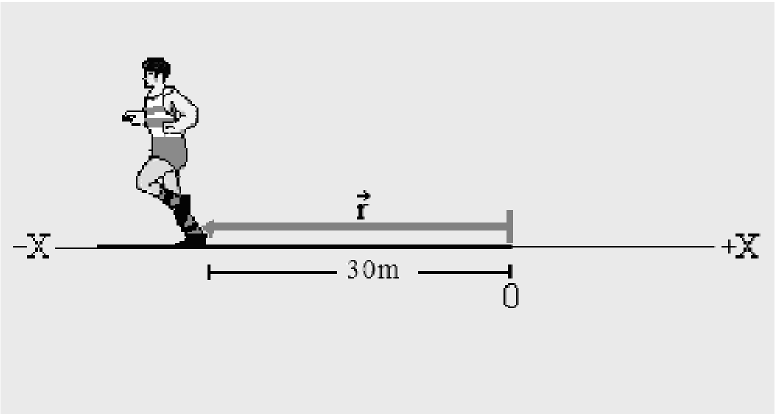


Figura 152. Atleta moviéndose en una dimensión. Fuente: elaboración propia

h. Determine el vector de posición $\vec{r}$ en el punto indicado del perro que se mueve sobre el eje positivo *x* que se muestra en la Fig. 153.

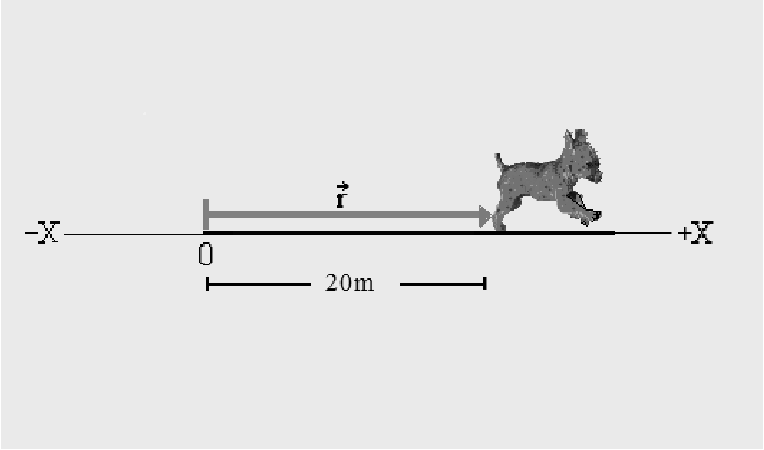


Figura 153. Perro moviéndose sobre el eje positivo del eje x. Fuente: elaboración propia

2) Problemas de vector desplazamiento

a. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ de un ave que parte del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f; encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por el ave para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 154.

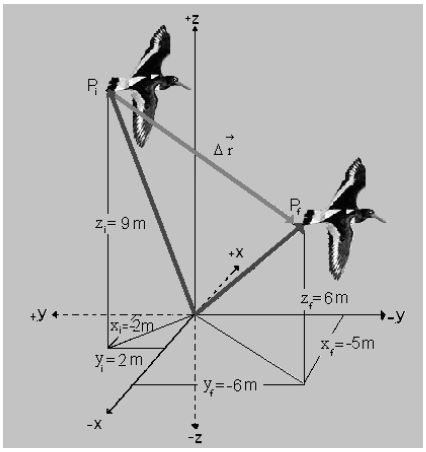


Figura 154. Ave moviéndose en el espacio de un punto a otro. Fuente: elaboración propia

b. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ del ave que parte del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f; encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por el ave para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 155.

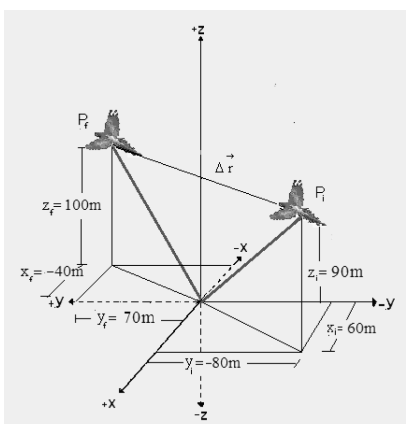


Figura 155. Papagayo moviéndose en el espacio tridimensional. Fuente: elaboración propia

c. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ de la mariposa que parte del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f; encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por esta para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 156.

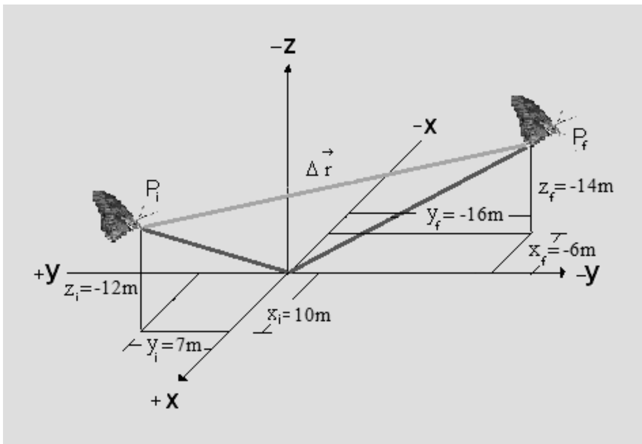


Figura 156. Movimiento de una mariposa en el espacio. Fuente: elaboración propia

d. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ de la mariposa que parte del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f; encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por esta para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 157.

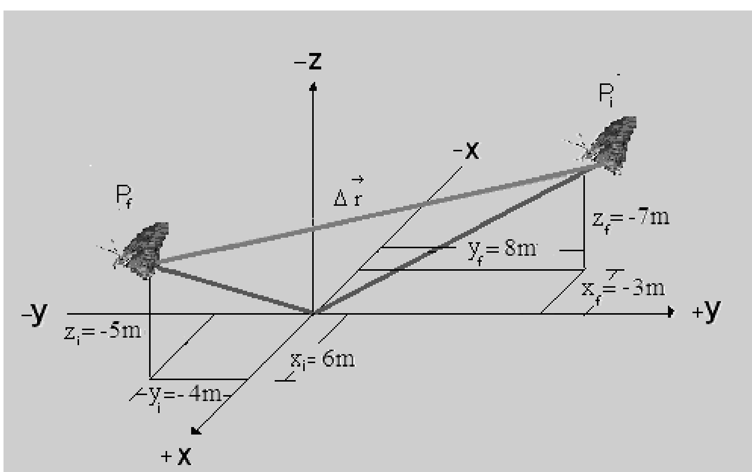


Figura 157. Mariposa moviéndose de un punto a otro en el espacio. Fuente: elaboración propia

e. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ del hombre que parte del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f ; encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por este para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 158. Determine su distancia total recorrida.

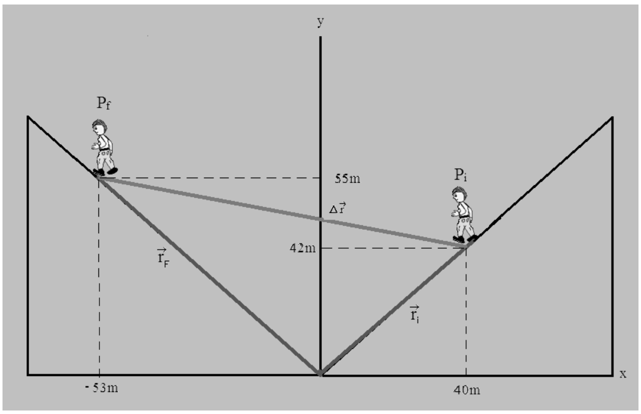


Figura 158. Persona descendiendo y ascendiendo sobre dos planos inclinados adyacentes. Fuente: elaboración propia

f. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ de la pelota que se desplaza del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f; encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por esta para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 159.

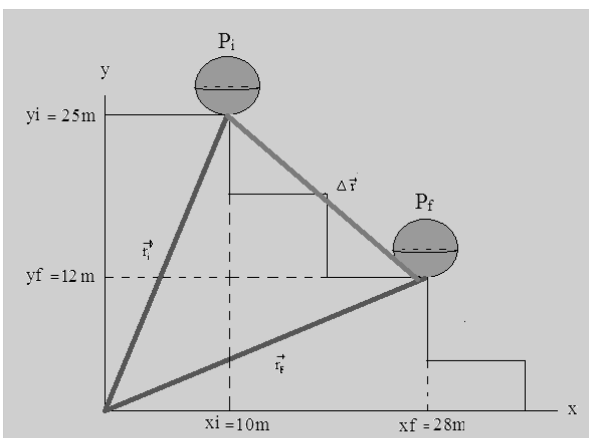


Figura 159. Pelota moviéndose de un punto a otro en un plano. Fuente: elaboración propia

g. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ del hombre que se desplaza del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f; encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por esta para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 160.

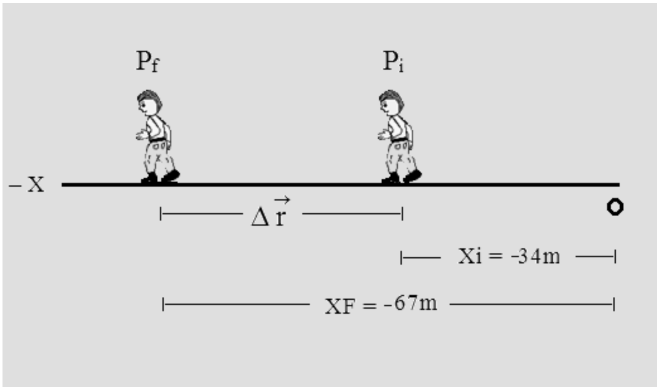


Figura 160. Hombre moviéndose sobre el eje x. Fuente: elaboración propia

h. Determine el vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}$ del perro que se desplaza del punto inicial P_i y se traslada al punto final P_f, encuentre la distancia recorrida en línea recta realizada por esta para ir del primer punto al segundo, de acuerdo con lo que se observa en la Fig. 161.

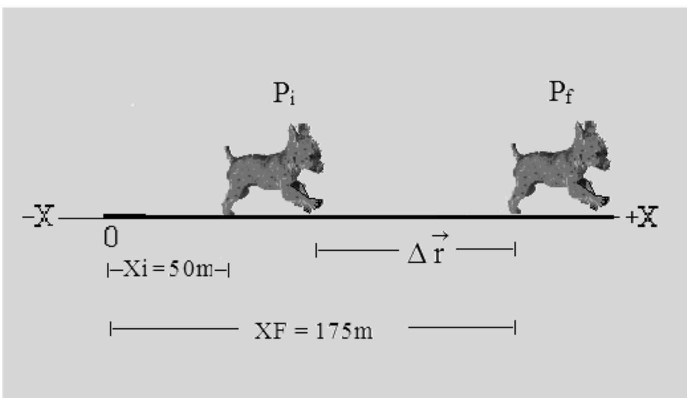


Figura 161. Perro moviéndose de un punto a otro sobre el eje x. Fuente: elaboración propia

3) Problemas de velocidad media

a. Determine la velocidad media de un carretillero que viaja en línea recta sobre el eje *y* positivo en cada uno de los intervalos que se muestra en la Fig. 162.

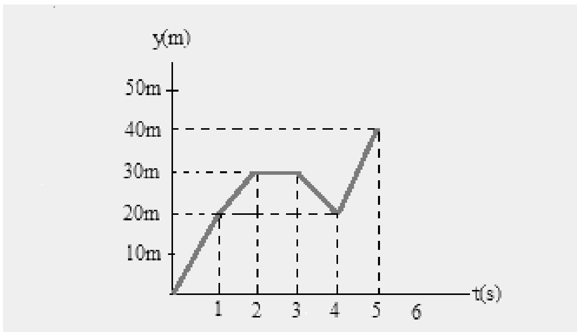


Figura 162. Trayectoria rectilínea seguida por un carretillero en el tiempo. Fuente: elaboración propia

b. Teniendo en cuenta la Fig. 163, determine la velocidad media del carretillero en el intervalo comprendido entre el origen de coordenadas y el último punto.

c. Una motocicleta que viaja en línea recta sobre el eje y, describe la gráfica de la Fig. 163. Determine la velocidad media entre los intervalos AB, CD, DF y FG.

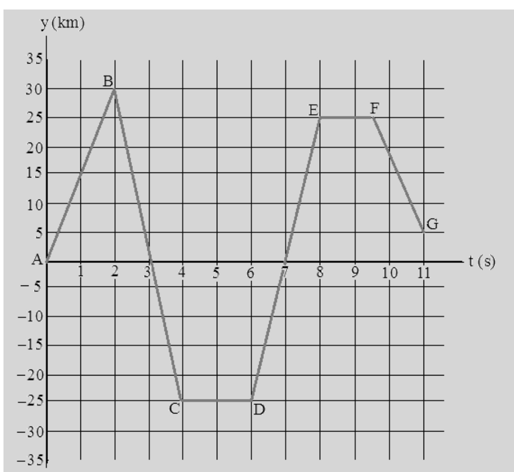


Figura 163. Trayectoria seguida por un motociclista sobre el eje y. Fuente: elaboración propia

d. De acuerdo con la gráfica de la Fig. 163, determine la velocidad media en todo el intervalo de tiempo, es decir, entre los puntos AG.

e. Una tortuga que se moviliza sobre el eje *y* presenta la gráfica de la Fig. 164, determine su velocidad media en cada uno de los intervalos: BC, DE FG Y AF.

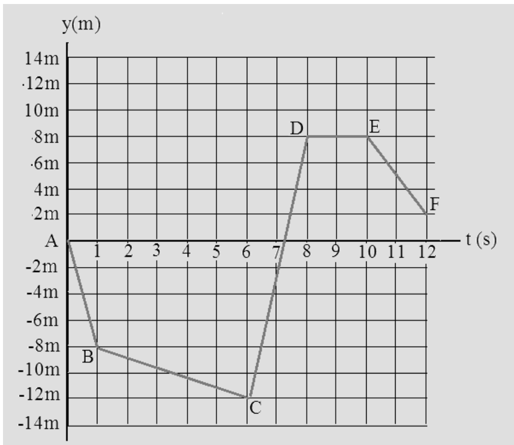


Figura 164. Trayectoria del recorrido unidimensional de una tortuga en el tiempo.
Fuente: elaboración propia

4) Problemas de velocidad instantánea

a. Se utiliza una nave robot con el fin de explorar la superficie marciana. La superficie marciana se encuentra en el plano (*xy*) y el módulo de descenso se encuentra en el origen del sistema de coordenadas (z = 0). La nave robot que es considerada un punto, presenta coordenadas *xy*, cuyos valores dependen del tiempo de acuerdo con las expresiones x = 5 m + (0.,2 m/ s^3) t^3, y, y = (4 m/s)t - (0,06 m/s^2) t^2.

- Determine la expresión general del vector de velocidad instantánea de la nave robot.
- Deduzca el vector de velocidad instantánea cuando t =1,2 s.

b. Carlos, quien es un estudiante de física muy aplicado, observa en su computadora que la posición de cierto punto en la pantalla de esta puede determinarse a través de la expresión:

$$\vec{r} = \left[4mm - \left(\frac{3mm}{s^2}\right)t^2\right]\hat{I} + \left[3mm + \left(\frac{2mm}{s^3}\right)t^3\right]\hat{J}$$

- Determine la función vectorial de velocidad instantánea del punto.
- Determine la velocidad instantánea del punto para t = 0 s y t = 1 s.
- Determine la magnitud y la dirección de la velocidad instantánea para t = 0 s y t = 1 s.

c. Un helicóptero de reconocimiento que patrulla la frontera colombo-venezolana realiza su rutina diaria. Luis, quien es un estudiante de física deduce que la posición de la nave desde su punto de ubicación en cualquier instante de tiempo puede determinarse a través de la expresión:

$$\vec{r} = \left[0{,}2km - \left(\frac{0{,}03km}{s}\right)t\right]\hat{I} + \left[0{,}4km - \left(\frac{0{,}02km}{s^2}\right)t^2\right]\hat{J} + \left[0{,}8km - \left(\frac{0{,}004km}{s^3}\right)t^3\right]\hat{k}$$

- Determine la función vectorial de velocidad instantánea del helicóptero.
- Determine la velocidad instantánea del helicóptero para t = 0 y t = 1,5 s.
- Determine la magnitud y la dirección de la velocidad instantánea del helicóptero para t = 0 y t = 1,5 s.

d. La Nasa quiere probar el funcionamiento de una nave espacial de reconocimiento para enviarla al planeta Marte. La nave maniobra sobre la superficie terrestre en el desierto de Sonora, y desde el centro de mando un equipo electrónico especial muestra a los científicos que la posición de la nave medida desde su punto de ubicación en cualquier instante de tiempo puede determinarse a través de la expresión:

$$\vec{r} = \left(\frac{0{,}002km}{s^2}\right)t^2\,\hat{I} + \left(\frac{0{,}003km}{s^3}\right)t^3\,\hat{J} + \left(\frac{0{,}004km}{s}\right)t\hat{K}$$

- Determine la función vectorial de velocidad instantánea de la nave.
- Determine la velocidad instantánea de la nave para t = 0 y t = 1,3 s.
- Determine la magnitud y la dirección de la velocidad instantánea del helicóptero para t = 0 y t = 1,3 s.

e. La Nasa quiere probar el funcionamiento de un vehículo especial de reconocimiento para enviarlo a la Luna. Este se prueba en el desierto del Sahara, y desde el centro de mando un equipo electrónico especial muestra a los científicos que la posición del vehículo medida desde su punto de ubicación sobre la arena del desierto, en cualquier instante de tiempo, puede determinarse a través de la expresión:

$$\vec{r} = \left[6m - \left(\frac{4m}{s^3}\right)t^3\right]\hat{I} + \left[5m + \left(\frac{3m}{s^2}\right)t^2\right]\hat{J}$$

- Determine la función vectorial de velocidad instantánea del vehículo.
- Determine la velocidad instantánea del vehículo para t = 0 y t = 2 s.
- Determine la magnitud y la dirección de la velocidad instantánea del helicóptero para t = 0 y t = 2 s.

5) Problemas de rapidez media

a. Determine en la Fig. 165 la rapidez media entre los puntos AC, CE y AF de una tortuga que se desplaza sobre el eje *y*.

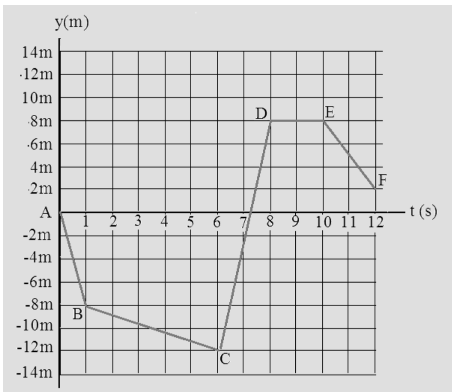


Figura 165. Trayectoria rectilínea en el tiempo de una tortuga. Fuente: elaboración propia

b. Una moto que se desplaza sobre el eje *y* describe en el tiempo la gráfica que se muestra en la Fig. 166. Determine en la figura la rapidez media de la moto entre los puntos BC, DE y AG.

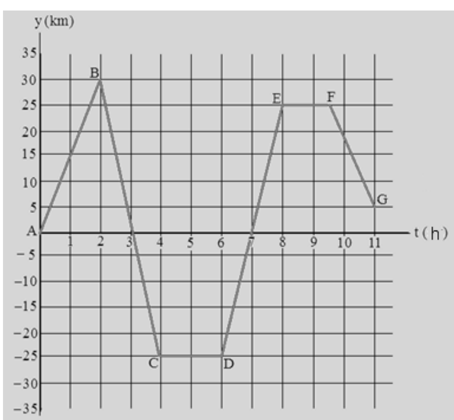


Figura 166. Recorrido de una moto en movimiento rectilíneo. Fuente: elaboración propia

c. Un automóvil que se desplaza sobre el eje *y* positivo describe en el tiempo la gráfica que se muestra en la Fig. 167. Determine en la figura la rapidez media del auto entre los puntos AB, BC, CD y AD.

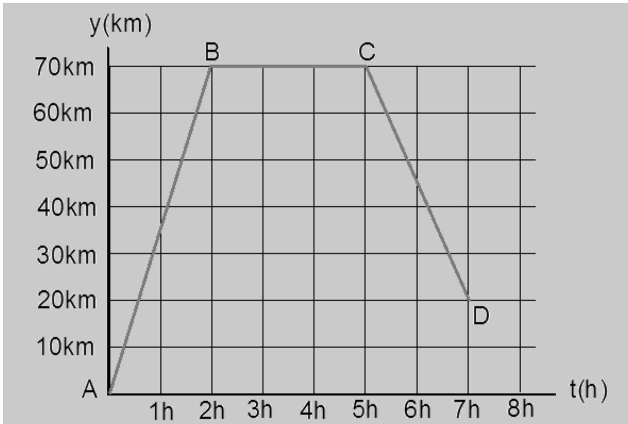


Figura 167. Trayectoria de un automóvil que se mueve sobre una línea recta en el tiempo.
Fuente: elaboración propia

d. Un auto que se mueve sobre el eje *y* positivo describe en el tiempo la gráfica que se muestra en la Fig. 168. Determine en la figura la rapidez media del auto entre los puntos BC, CD, DE y AE.

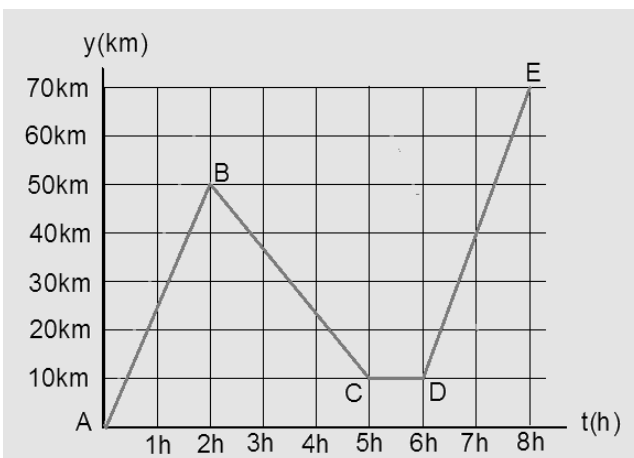


Figura 168. Descripción de la trayectoria de un auto que se mueve en línea recta.
Fuente: elaboración propia

e. Un estudiante analiza la gráfica de posición contra tiempo de una moto que se mueve sobre el eje *y* positivo y describe los siguientes puntos: P1(1h, 50km); y P2(4h, 200km). ¿Cuál es la rapidez media de la moto entre estos dos puntos?

6) Problemas de rapidez instantánea

a. La función escalar de posición de un cuerpo en movimiento se encuentra definida por medio de la expresión: $r(t) = (2\ m/s^{3)}\ t^3 + (3\ m/s)t - 20\ m$. Determine la rapidez instantánea del objeto para los siguientes valores de tiempo: $t = 0$ y $t = 1$ s.

b. La nave espacial Enterprise se mueve hacia una galaxia cercana a la Tierra. Los astronautas que dirigen la nave establecen que la ecuación que permite determinar la posición de la nave respecto a la Tierra en el tiempo está dada por la ecuación $r(t) = (5\ km/h^{3)}\ t^3 + (6\ km/h^2)t^2 + (20\ km/h)t + 0{,}006$ km. Determine la rapidez instantánea de la nave pata $t = 1{,}1$ h y $t = 2{,}4$ h.

c. La función escalar de posición de una nave en el espacio se encuentra definida por medio de la expresión: $r(t) = (20\ km/h^{3)}\ t^3 - (4\ km/h^2)t^2 - (12\ km/h)t$. Determine la rapidez instantánea de la nave para los siguientes valores de tiempo $t = 0$ y $t = 2$ h.

d. La posición de una mariposa de acuerdo con un estudiante de física está determinada por medio de la función escalar $r(t) = (7\ m/s^{3)}\ t^3 - (2\ m/s)\ t + 20\ m$. Determine la rapidez instantánea de la mariposa para $t = 1{,}2$ s y $t = 2{,}4$ s.

e. La función escalar de posición determinada de una hormiga respecto a su hormiguero está dada por medio de la expresión $r(t) = (5\ m/s^{3)}\ t^3 - (9\ m/s^2)t^2$. Determine la rapidez instantánea de la hormiga para $t = 0$ y $t = 1{,}4$ s.

7) Problemas de movimiento rectilíneo uniforme

a. Un atleta en el tiempo $t = 0$, se encuentra en reposo en el punto $P_{1,}$ el cual se encuentra situado a una distancia de 2 km respecto al origen de un sistema de coordenadas. Este parte con velocidad constante hacia un punto P_2, que se ubica a 10 km del mismo origen de coordenadas. El atleta emplea en llegar a este último punto un tiempo de $t = 0{,}8$ h. Calcule la velocidad del atleta y su rapidez respecto a un observador situado en el origen de coordenadas.

b. Un motociclista en un tiempo *t1* se ubica en un punto *x1* situado entre dos ciudades A y B. Si este, moviéndose a rapidez constante de 50 km/h, emplea un tiempo de ciudad a ciudad de 0,9 h, determine bajo estas condiciones la posición del motociclista con respecto a la ciudad A si en el tiempo *t1* su posición con respecto a la ciudad B es de 20 km.

c. La posición que presenta un automóvil ubicado entre dos ciudades A y B es la siguiente: xA = 32 km y xB = 56 km. Si este viaja a rapidez constante de ciudad a ciudad de 42 km/h, ¿cuál es el tiempo total empleado por este para ir de la ciudad A a la B?, ¿qué tiempo emplea para ir de la ciudad A a la posición indicada inicialmente?

d. Un camión cargado parte de una ciudad A, y en un tiempo de dos horas recorre a rapidez constante en línea recta una distancia de 60 km. Si una ciudad B ubicada sobre esta misma línea se encuentra a 600 km de la ciudad A, determine la velocidad y la rapidez del camión si el conductor decidiera durante todo el trayecto de ciudad A a la B mantener esta rapidez de 60 km/h. Además, ¿cuál es el tiempo total empleado por el camión para ir de la ciudad A a la B?

e. Dos autos ubicados entre dos ciudades A y B viajan en línea recta y en la misma dirección con rapidez constantes de 30 m/s y 22 m/s, respectivamente. Si la distancia de separación entre estas dos ciudades es de 20 000 m, ¿cuál es la distancia de separación entre el auto que llega primero y el segundo si parten al mismo tiempo de la ciudad A para la B?, ¿cuál es la diferencia de tiempo entre el primero que llega y el segundo?

8) Problemas de rapidez constante

a. Un automóvil que se mueve con rapidez constante *v*, recorre una distancia de 800 m en 16 s, ¿cuál es el valor de su rapidez?

b. Un camión recorre una distancia de 600 km en 5 h. Si el camión se mueve a rapidez constante *v*, cuál es el valor de esta última.

c. Una motocicleta que se mueve a rapidez constante de 46 m/s emplea un tiempo de 5 s en recorrer una distancia *d*. ¿Cuál es el valor de esta distancia *d*?

d. Un avión con rapidez constante de 200 km/h recorre una distancia de 1200 km en un tiempo *t*, ¿cuál es el valor de este tiempo *t*?

e. En un tiempo de 8 h una tortuga que se mueve con rapidez constante ha recorrido una distancia de 64 m. ¿Cuál es el valor de la rapidez imprimida por la tortuga en m/s?

9) Problemas de aceleración media

a. Un automóvil se mueve en dirección del eje x positivo con rapidez constante de 40 m/s durante un tiempo de 20 s. Si a los 25 s de su recorrido su rapidez es de 62 m/s, calcule su aceleración media aplicada en los últimos cinco segundos de su movimiento.
b. Un atleta comienza una maratón de una ciudad A hacia una ciudad B en línea recta, en sus primeras tres horas de recorrido mantiene una rapidez uniforme de 32 km/h. Si después decide variar su rapidez y, luego de dos horas remata la carrera a 38 km/h, ¿cuál es la aceleración media imprimida en este tiempo y su magnitud en m/s?
c. Un motociclista que se desplaza sobre una carretera recta se mueve con rapidez constante de 20 m/s. Si en un punto de su recorrido y de forma imprevista le sale en la vía una vaca, el conductor le imprime los frenos a la moto y esta demora 10 s en detenerse a pocos metros del animal, ¿cuál es la aceleración media imprimida por el motociclista desde el momento en que imprime los frenos hasta detenerse?, y ¿cuál es la magnitud de la aceleración?
d. Un camión se mueve sobre una carretera recta a una rapidez uniforme de 40 km/h. Cuando en un instante de tiempo el conductor divisa a pocos metros de su posición un bache sobre la vía, le imprime los frenos al camión y tarda tres segundos en detenerse. Si las llantas delanteras del camión quedan detenidas en todo el borde del bache, ¿cuál es la aceleración media imprimida al camión?, ¿cuál es la distancia que recorre el camión hasta detenerse?
e. El conductor de un automóvil que viaja sobre una carretera recta imprime lo frenos cuando de repente observa sobre la vía un hueco de gran tamaño. Si el auto viajaba inicialmente a una rapidez uniforme de 18 m/s, y, después de aplicar los frenos, reduce su rapidez a 1/6 de esta en los 3 s que tarda a llegar al hueco, ¿cuál es la aceleración media que se le imprime al auto en estos tres segundos?, ¿a qué distancia se encontraba el auto del hueco cuando se le aplicaron los frenos?, ¿con que rapidez el auto llegó al borde del hueco?

10) Problemas de aceleración instantánea

a. La función vectorial de posición espacial de un avión acrobático determinada por un observador en tierra está dada por medio de la expresión:

$$\vec{r} = [4ms^2)t^2 + (3m/s)t]\hat{I} + [(5m/s^3)t^3 - (3m/s^2)t^2]\hat{J} - [(6m/s)t + (1m/s^3)t^3]\hat{k}$$

- Determine el vector de aceleración instantánea del avión en función del tiempo.
- El vector de aceleración instantánea para t =1 s y t = 1,5 s.
- Determine las magnitudes del vector de aceleración instantánea del avión pedidas en el punto anterior.

b. La función vectorial de posición espacial de una mariposa definida por un científico entomólogo en tierra está dada por medio de la expresión:

$$\vec{r} = [4m + (1m/s^3)t^3]\hat{\imath} + [(2m/s^2)t^2 - 6m]\hat{\jmath} + [2m + (3m/s^2)t^2]\hat{k}$$

- Determine el vector de aceleración instantánea de la mariposa en función del tiempo.
- El vector de aceleración instantánea de la mariposa para t = 0 y t = 1s.
- Determine las magnitudes del vector de aceleración instantánea de la mariposa pedidas en el punto anterior.

c. Según un biólogo marino la función vectorial de posición espacial de un delfín medida desde su posición en las profundidades del mar está dada por medio de la expresión:

$$\vec{r} = [6\mathrm{m} - (2\mathrm{m/s^4})\mathrm{t}^4]\hat{\imath} + [(9\mathrm{m/s^3})\mathrm{t}^3 + 5\mathrm{m}]\hat{\jmath} + [4\mathrm{m} - (2\mathrm{m/s^3})\mathrm{t}^3]\hat{k}$$

- Determine el vector de aceleración instantánea del delfín en función del tiempo.
- El vector de aceleración instantánea del delfín para t = 0,5 y t = 1,3 s.
- Determine las magnitudes del vector de aceleración instantánea del delfín pedidas en el punto anterior.

d. La función vectorial de posición espacial de un ave definida por un observador se define por medio de la expresión:

$$\vec{r} = [8\mathrm{m} - (2\mathrm{m/s^3})\mathrm{t}^3]\hat{\imath} + [(4\mathrm{m/s^2})\mathrm{t}^2 - 6\mathrm{m}]\hat{\jmath} + [9\mathrm{m} - (2\mathrm{m/s^3})\mathrm{t}^3]\hat{k}$$

- Determine el vector de aceleración instantánea del ave en función del tiempo.
- El vector de aceleración instantánea del ave para t = 0,6 s y t = 1, 5 s.
- Determine las magnitudes del vector de aceleración del ave pedidas en el punto anterior.

e. Una persona en tierra que observa a un parapentista que vuela por los aires, describe que su función vectorial de velocidad instantánea de su velocidad está dada por medio de la expresión:

$$\vec{v} = [(8m/s^3)t^2]\hat{I} + [(4m/s)t]\hat{J} + [(7m/s^2)t^2]\hat{k}$$

- Determine el vector de aceleración instantánea del parapentista en el aire en función del tiempo.
- El vector de aceleración instantánea del parapentista en el aire para t = 0 y t = 1,2 s.
- Determine las magnitudes del vector de aceleración del parapentista en el aire pedidas en el punto anterior.

11) Problemas de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

a. Un auto parte del reposo con aceleración constante desde el origen de coordenadas en la dirección *-x*. Si en el tiempo t = 2 s su rapidez es de 28 m/s, ¿cuál es la aceleración del auto?, ¿cuál es su desplazamiento con respecto al origen de coordenadas en el tiempo t = 2 s?

b. Un ciclista rezagado persigue al grupo principal que se dirige en dirección este hacia la meta. Este último ciclista cruza un pequeño pueblo y con la intención de alcanzar a los que van adelante acelera en el momento que pasa un letrero, el cual señala el límite del pueblo. La magnitud de su aceleración es constante y tiene un valor de 5 m/s^2. Se conoce además que en t = 0 se encuentra a 10 m al este del letrero, y presenta en este punto una rapidez de 18 m/s en la misma dirección de posición. De acuerdo con lo planteado anteriormente calcule su velocidad y posición cuando ha transcurrido un tiempo de t = 4 s. ¿Cuál es la posición del ciclista cuando se mueve en dirección este, con una rapidez de 30 m/s?

c. Un motociclista se mueve en dirección este con rapidez constante de 24 m/s en una carretera recta. Su conductor aplica los frenos al observar que a 28 m de su posición se encuentra un camión parado en todo el medio de la vía. Si el motociclista demora seis segundos en detenerse, calcule la desaceleración aplicada por el motociclista, el desplazamiento sufrido por el motociclista en este tiempo, y si el motociclista alcanza o no a impactar el camión bajo estas condiciones.

d. Una avioneta de fumigación sufre una avería cuando está realizando una de sus faenas. El capitán de la aeronave decide volver a la pista de aterrizaje y sobre esta le aplica a la avioneta una desaceleración de 22 m/

s^2. Si necesita unos 0,12 km para detenerse, calcule el tiempo empleado en detenerse y la rapidez con que la avioneta toca la pista.

e. Sobre una pista recta de carrera se encuentra que uno de los autos en competencia emplea unos 6 s en alcanzar desde el reposo una velocidad de 240 km/h. Si la aceleración imprimida al auto es constante, ¿con qué velocidad pasara el auto la meta si faltan 322 m para llegar a ella?, ¿cuál es el tiempo empleado por el auto para recorrer esta distancia?

12) Problemas de planos inclinados

a. Sobre una superficie lisa de 45º de inclinación respecto a la horizontal descansa un bloque de masa 6 kg sobre la cual se aplica un módulo de fuerza *f* de 300 N. Si la fuerza aplicada al bloque presenta un ángulo de 38º respecto a la superficie inclinada, calcule la aceleración que sufre el bloque.

b. En la parte más alta de un plano inclinado de 12 m de longitud, el cual forma un ángulo de elevación de 30º con la línea horizontal, y que además su superficie no presenta fricción al contacto con otro cuerpo, se coloca un bloque de 22 kg de masa. Al tener presente la información anterior determine la aceleración del bloque, la velocidad adquirida por el bloque al llegar al extremo inferior del plano inclinado, y si este parte del reposo desde la parte superior.

c. Un bloque de masa 80 kg se desliza sobre la superficie de un plano inclinado partiendo desde su parte más alta. La superficie presenta un coeficiente de rozamiento cinético $\mu_C{}^{o} = 0{,}4$ y un ángulo de elevación de 44º con respecto a la línea horizontal. Si el bloque demora cuatro segundos en llegar a la parte más baja del plano, donde presenta una rapidez de 5,2 m/s, calcule: la aceleración del bloque y su magnitud, la velocidad inicial de deslizamiento del bloque, y el desplazamiento total del bloque en la dirección de su movimiento (eje *x*).

d. Un estudiante de física desea medir el coeficiente de rozamiento cinético de una superficie inclinada, la cual presenta un ángulo de elevación respecto a la horizontal de 25º. Para lo anterior coloca sobre la parte inferior de esta superficie un bloque de masa de 3 kg, y al instante le imprime un movimiento ascendente de rapidez de 6 m/s; si el bloque se detiene a los 3,6 m de longitud, ¿cuál es el valor del coeficiente de rozamiento cinético obtenido por el estudiante?, ¿cuál es la fuerza de fricción cinética que actúa sobre el bloque si esta se considera constante?

e. Se coloca sobre la parte más alta de una superficie rustica de 8 m de longitud y de 34º de inclinación respecto a la horizontal una masa de 6,2 kg. Si el bloque a los 2 s de haberse soltado ha recorrido una distancia de 3 m y presenta una rapidez de 0,6 m/s, calcule: la aceleración de movimiento del cuerpo, si esta se considera constante; el coeficiente de rozamiento cinético de la superficie; el tiempo total que demora al bloque en alcanzar la parte más baja de la superficie; y la velocidad con la que llega a la parte más baja de la superficie.

f. La velocidad con la que llega un cuerpo de masa de 10 kg en el punto más bajo de una superficie inclinada es de 26 m/s. Si la superficie, además de ser totalmente lisa, presenta un ángulo de inclinación de 48º y de longitud de 12 m, calcule el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al piso y la aceleración de descenso del cuerpo.

13) Problemas de cuerpos en caída libre

a. Una persona sostiene una bolsa de basura en sus manos a una altura de 1,30 m con respecto al fondo del bote de basura que se encuentra en el piso, con el fin de arrojarla en este.

- Determinar la velocidad con la que la bolsa impacta el fondo del bote de basura.
- El tiempo que demora en obtener la velocidad calculada en el punto anterior.

b. Se deja caer un bloque de madera desde el reposo verticalmente hacia abajo.

- Determine la velocidad del bloque cuando ha transcurrido un tiempo de 2s.
- ¿Qué distancia ha descendido el bloque en estos 2 s?
- Si el bloque se lanzó desde una altura de 180 m, ¿qué tiempo gasta en alcanzar el piso?
- ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando ha descendido una distancia de 42 m?
- ¿Con qué velocidad el bloque impacta el piso?

c. Un camión que transporta cajas de frutas se desplaza sobre una carretera recta. Una de las cajas que se encontraba en la orilla de la parte trasera del vehículo de carga cae repentinamente en caída libre. Si la altura a la que se encontraba la caja con respecto al pavimento es de 1,60 m, calcule el tiempo que tarda la caja en caer al pavimento y la rapidez con la que la caja impacta el pavimento.

d. Un foco de luz se desprende del soporte que lo sostiene, el cual se encuentra en el techo de la sala de una casa. Si la velocidad con la que impacta el piso el foco es de 2,3 m/s, calcule: a) el tiempo que emplea el foco en caer al piso, b) la altura a la que se encontraba el foco respecto al piso.
e. El tiempo empleado por un cuerpo en caer al piso es de 8,4 s. Si su movimiento es en caída libre, ¿a qué altura se encontraba el cuerpo cuando se dejó caer?, ¿con qué velocidad el cuerpo impacta el piso?, ¿cuál es la rapidez del bloque cuando se encuentra a 2 m respecto al piso?

14) Problemas de lanzamiento vertical de un cuerpo hacia abajo

a. Un joven se prepara a lanzar una pelota desde la azotea de un edificio y la suelta en el momento en que su mano se encuentra a nivel de la azotea con una rapidez de 6 m/s. Si la pelota emplea un tiempo de 3 s en impactar el suelo, calcule la velocidad de impacto de la pelota y la altura del edificio.
b. Un bloque de concreto se lanza verticalmente hacia abajo con una rapidez inicial de 2,3 m/s. Determine la rapidez con la que el bloque impacta el piso si el bloque fue lanzado desde una altura de 12,8 m, la velocidad con la que el bloque impacta el piso, y la rapidez del bloque cuando se encuentra a 6 m del piso.
c. Una pelota que se dejó caer libremente desde la azotea de un edificio pasa por el sexto piso de este con una rapidez de 6 m/s. Si la altura a la que se encuentra el piso en mención es de 13,8 0 m, determine: el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo desde el sexto piso, la velocidad de impacto de la pelota con el piso, la altura total del edificio y el tiempo que emplea la pelota en llegar al sexto piso desde que se dejó caer de la azotea.
d. El valor de la altura desde la cual fue lanzada una pelota con velocidad inicial diferente de cero es de 600 m. Si su tiempo de impacto con el piso fue de 10 s, ¿cuál es la rapidez inicial con la que fue lanzada la pelota?, ¿cuál es su velocidad de impacto?, ¿cuál es su rapidez cuando se encuentra a mitad de camino?
e. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia abajo con rapidez inicial de 8,6 m/s. Si la rapidez de impacto de este con el piso fue de 32,4 m/s, ¿cuál es el valor de la altura desde la que se lanzó el cuerpo?, b) ¿cuál fue su tiempo de bajada?, ¿a qué altura se encontraba el cuerpo a los 0,5 s de caída?

15) Problemas de lanzamiento vertical de un cuerpo hacia arriba

a. Un arquero se dispone a lanzar con su arco una flecha verticalmente hacia arriba. Si la flecha es disparada desde una altura de 1,70 m y con rapidez inicial de 16,2 m/s, calcule: el tiempo que emplea la flecha en llegar a su punto más alto, la altura máxima a la que llega la flecha, y la velocidad y la posición de la flecha cuando ha transcurrido un tiempo de 0,3 s desde el momento en que fue disparada.

b. Un aparato de lanzamiento de pelotas de béisbol se acomoda verticalmente con el fin de lanzarlas hacia arriba. Si la máxima altura a las que llegan las pelotas es de 60,4 m, determine: el tiempo que emplea la pelota en llegar a esta altura máxima, la velocidad inicial con la que sale la pelota del aparato, la altura y la velocidad de la pelota a los 0,4 s de estar subiendo.

c. Una persona ubicada en una plataforma de 10,5 m de altura lanza una piedra verticalmente hacia arriba con rapidez inicial de 6,6 m/s. Si pasado un tiempo *t* esta presenta una rapidez de 3,8 m/s, calcule: el tiempo *t* que se empleó para que la pelota obtuviera esta rapidez, la altura a la que se encuentra la pelota en el tiempo *t*, c el tiempo total empleado por la pelota para llegar al piso, y la velocidad con la que la pelota impacta el piso.

d. Un cazador de aves divisa en la parte más alta de un árbol de 10,8 m de altura un par de palomas que descansan sobre su copa. El cazador que se encuentra directamente en la parte de abajo de las palomas decide tirarlas con una cauchera. Si la rapidez inicial hacia arriba que imprime la persona a la piedra con su cauchera es de 8,2 m/s, ¿con qué velocidad la piedra impacta a una de las palomas que se encuentran en la cima del árbol?, ¿cuál es el tiempo que emplea la piedra en impactar la paloma? Si la persona no tuviera buena puntería y la piedra pasara en limpio a través del árbol, sin impactar las palomas, ¿a qué altura máxima llegaría esta?

e. Una persona dispara una pistola verticalmente hacia arriba con el fin de impactar unos patos que vuelan directamente sobre su cabeza. Si las balas salen con una rapidez inicial de 80,8 m/s e impacta un pato con una rapidez 78,9 m/s, ¿a qué altura vuelan los patos?, ¿qué tiempo pasa desde que se disparó el arma hasta que la bala impactó el ave?

16) Problemas de movimiento semiparabólico

a. Un joven que juega golf en la azotea de un edificio de 14 m de altura, ubica la pelota en todo el borde del edificio y con el palo le imprime una rapidez inicial de 4 m/s en dirección horizontal. Calcule el tiempo que demora la pelota en impactar el piso, la velocidad con la que la pelota impacta el piso, la distancia a la que se encuentra el punto de impacto de la pelota en el suelo con respecto a la base del edificio, y la posición de la pelota en el tiempo t = 0,2 s después de haber sido golpeada e impulsada.

b. Un hombre que se encuentra sobre una plataforma de 20 m de altura respecto al piso decide patear un balón de futbol a ras de piso desde el punto en el que se encuentra. Si se conoce que la distancia máxima horizontal recorrida por la pelota, desde el borde de la plataforma donde se encuentra la persona al punto de impacto con el piso es de 24 m, determine la velocidad horizontal con la que salió la pelota disparada, el tiempo que la pelota permaneció en el aire desde que salió del borde de la plataforma, la velocidad vertical con la que el balón impactó el piso, así como la velocidad y la rapidez de impacto del balón con el piso.

c. Un auto se mueve en la noche bajo una tormenta con rapidez constante de 120 m/s sobre una carretera recta. Cuando, de repente, el conductor del auto aún dentro de este se ve volando por los aires, debido a que el puente por donde rutinariamente pasaba colapsó a causa del problema ambiental presente en el momento. Si el auto desde el borde de la carretera demora un tiempo total de 8 s en impactar la superficie de un río que pasaba por debajo del puente, ¿cuál es la distancia horizontal máxima recorrida por el auto desde este borde de la vía al punto de impacto con la superficie del agua?, ¿cuál era la altura del puente respecto a la superficie del agua?, ¿con qué velocidad el auto impacta la superficie del agua?

d. Un bañista declara que cada vez que se lanza hacia el río desde un puente sin la protección de barandas, con rapidez horizontal V0, su alcance máximo horizontal medido al respecto a la base del puente es de unos 10 m. Basado en esta información, calcule la altura del puente respecto al agua, el tiempo que demora el bañista en caer al agua, c) la rapidez V0 con la que el bañista sale disparado horizontalmente del puente, y la velocidad de impacto con el agua.

e. Un jugador de baloncesto de 1,50 m de longitud, lanza hacia la canasta desde esta altura el balón, y logra encestarlo. Si el aro se encuentra a una altura de 3,05 m y la rapidez vertical con la que llega el balón a este es cero, calcule la distancia horizontal que recorre el balón para lograr ser encestado, la distancia vertical que recorre el balón para entrar en la canasta, y el tiempo que demora el balón desde que fue lanzado por el jugador hasta que es encestado.

17) Problemas de movimiento parabólico

a. Una joven lanza desde la azotea de un edificio una pelota de béisbol hacia arriba con un ángulo de disparo de 28º con respecto a la línea horizontal, y con rapidez inicial de 14 m/s. Si la altura comprendida entre la planta de los pies de la persona y el punto desde el cual este lanza la pelota es de 1,82 m, y la altura del edificio es de 44 m, determine: ¿cuál es el tiempo de vuelo de la pelota? b), ¿cuál es su alcance horizontal máximo?, ¿cuál es la altura máxima que alcanza la pelota con respecto al punto desde el cuál fue lanzado?, ¿cuál es el tiempo empleado por la pelota para ir desde su punto inicial de lanzamiento hasta su altura máxima?, ¿cuál es el tiempo que emplea la pelota en llegar al piso?, ¿cuál es la velocidad de impacto de la pelota con el piso?, y ¿cuál es la distancia entre el punto de impacto de la pelota con el piso y la base del edificio? Determine también el vector de posición de la pelota en t = 1,5 s.

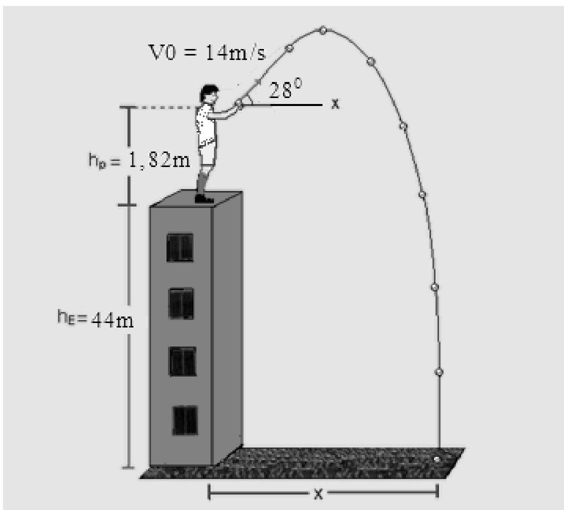


Figura 169. Lanzamiento hacia arriba de una pelota de béisbol por una persona en tiro parabólico. Fuente: elaboración propia

b. Un jugador de futbol encargado de patear el balón desde punto de grama por su gran potencia en los pies, le pega a este con un ángulo de inclinación de 25º y con rapidez inicial de 12 m/s. Determine la distancia horizontal y vertical máxima alcanzada por el balón, la rapidez inicial con la que sale el balón en cada uno de los ejes, el tiempo de subida y bajada del balón, la posición y la velocidad del balón a los 0,5 s de su partida.

c. Dos jugadores de fútbol se encuentran entrenando para perfeccionar la entrega de balón de jugador a jugador. Para esto se colocan a una distancia equidistante horizontal de 60 m. Si el primer jugador le pega al balón, y este alcanza una altura máxima vertical de 8 m y logra llegar hasta el segundo jugador, calcule la rapidez inicial con la que salió disparado el balón, el tiempo de vuelo, la velocidad con la que la pelota llega al segundo jugador, el tiempo de subida del balón, y el ángulo de disparo.
d. En una prueba de lanzamiento de bala, el deportista alcanza una marca lineal horizontal de 32 m. Al saber que la bala sale de su mano a una altura de 1,98 m, con rapidez inicial de 15 m/s y ángulo de tiro respecto a la horizontal de 44,98º, determine el tiempo de vuelo de la bala, la altura máxima de la bala respecto al suelo, y la velocidad de la bala a los 0,8 s de vuelo.
e. Un estudiante de física que desarrolla un laboratorio de tiro parabólico lanza un proyectil con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (4{,}2\text{m/s})\hat{I} + (3{,}5\text{m/s})\hat{J}$. Calcule con la información dada la rapidez inicial con la que fue disparado el proyectil, el ángulo de disparo y el tiempo de subida.

18) Problemas de frecuencia y periodo en el movimiento circular uniforme

a. Un atleta emplea un tiempo de 3,2 s en dar 10,5 vueltas a una pista circular con rapidez constante: calcule la frecuencia y el periodo de movimiento del atleta.
b. El disco de una pulidora que gira a rapidez constante realiza sesenta revoluciones en 2,4 s. Determine su periodo y su frecuencia de movimiento.
c. Un estudiante de física determina que el periodo de movimiento de una de las ruedas de la fortuna a rapidez constante en un casino es de 3,6 s. Determine la frecuencia de movimiento de la rueda.
d. En una feria de motos, uno de los asistentes al evento gira la rueda de una de las motocicletas a rapidez constante, y determina que esta gira a ochenta y cuatro revoluciones por minuto; calcule el periodo de movimiento y la frecuencia de movimiento.
e. Las aspas de un abanico que se mueven a rapidez constante realizan sesenta y ocho revoluciones en 2,6 s, determine su periodo y su frecuencia.

19) Problemas de velocidad tangencial en el movimiento circular uniforme

a. Una partícula con movimiento circular uniforme describe una trayectoria circular en el plano *xy* de radio r = 6,2 cm. Si su periodo de movimiento es de T = 1, calcule su velocidad tangencial en $\theta = 40^o$ y $\theta = 220^o$, y su rapidez tangencial.

b. La rueda de una moto de 36 cm de radio se mueve con movimiento circular uniforme y con rapidez tangencial $v_T = 4{,}6$ m/s. Si el ángulo subtendido entre cada radio que pertenece a la rueda es de 35º, calcule el periodo y la frecuencia de movimiento de un punto de la rueda, la velocidad tangencial del punto de ajuste del segundo, quinto, séptimo y noveno radio de la rueda.

c. La rueda de un automóvil con movimiento circular uniforme realiza 84,5 r.p.m. Calcule su velocidad tangencial y su módulo para $\theta = 0^o$ y $\theta = 90^o$, así como su frecuencia y su periodo.

d. Una mancha de pintura que se encuentra sobre un disco de pulidora presenta una distancia de 5,4 cm respecto al eje central del disco. Si el disco se mueve a rapidez constante y realiza 12 400 revoluciones por hora, determine la rapidez tangencial de la mancha en el disco, y la velocidad tangencial de la mancha cuando $\theta = 920^o$, así como su periodo y frecuencia.

e. Una estudiante de física coloca en el eje central de una licuadora una regla de 30 cm de longitud. Si la estudiante pone a girar uniformemente la licuadora a 360 r. p.m., determine el periodo de movimiento de la regla, la rapidez tangencial de cada uno de los puntos que marcan los cm de la regla, y la velocidad tangencial de cada uno de estos puntos cuando $\theta = 1480^o$.

20) Problemas de aceleración centrípeta o radial

a. Un auto que presenta un movimiento circular uniforme en la pista de un autódromo de radio r = 42,4 m tiene una rapidez tangencial constante de 46 m/s. Calcule la magnitud de la aceleración centrípeta del auto.

b. Dos ruedas dentadas se encuentran conectadas a través de una banda conductora que se mueve a rapidez constante v_T, si el periodo de la rueda más pequeña de radio $r_1 = 0{,}3$ m es de $T_1 = 0{,}4$ s, ¿cuál es el periodo de la rueda más grande de radio $r_2 = 0{,}5$ m?, ¿cuál es la rapidez tangencial v_T de la banda y de los dientes de la rueda?, ¿cuál es la magnitud de la aceleración centrípeta de cada uno de los dientes de las ruedas?

c. Si las ruedas del auto descrito en el ejercicio a) es de 36 cm, determine el módulo de la aceleración centrípeta de las ruedas si estas giran a 220 r.p.m.
d. Las cuchillas de una licuadora que giran a 320 r.p.m presentan un radio de 44 mm respecto al eje central de la licuadora. Determine el módulo de la aceleración centrípeta de las cuchillas.
e. El módulo de la aceleración centrípeta de un disco de pulidora de radio 30 cm es de 12,4 cm/s^2. Determine la magnitud de su velocidad tangencial.
f. Las aspas de un helicóptero se mueven a 12000 r.p.m. Si el radio de ellas es de 2,3 m, calcule el módulo de la aceleración centrípeta de las aspas.
g. Dos ruedas dentadas de radios r_1 = 0,1 m y r_2 = 0,2 5m se encuentran conectadas a través de una banda conductora, y se mueven a rapidez constante v_T = 0,8 m/s. Calcule el módulo de la aceleración centrípeta de los dientes de cada una de las ruedas y el periodo de cada una de ellas.

21) Problemas de desplazamiento angular

a. El eje central de una pulidora gira sobre su propio eje un ángulo de 8346º en dirección contraria a las manecillas del reloj. ¿Cuál es el valor de su desplazamiento angular en radianes y en revoluciones?.
b. Una barra delgada describe un movimiento circular uniforme alrededor de un eje central en uno de sus extremos. Si la barra en cierto tiempo a barrido un ángulo de 1,23 radianes y dos pequeños segmentos de ella presentan valores de radio r_1 = 34 cm y r_2 = 42 cm respecto al eje de rotación, determine las longitudes de arco s_1 y s_2 recorridos por cada uno de ellos en sus rotaciones.
c. Una regla de longitud 30 cm se pone a rotar alrededor de uno de sus extremos. Si en un tiempo t cualquiera está a barrido un ángulo de $\frac{9}{4}\pi$ radianes determine su desplazamiento angular en grados y en revoluciones.
d. Una regla de longitud 20 cm se pone a rotar alrededor de uno de sus extremos. Si en un tiempo t cualquiera esta ha barrido un ángulo de $\frac{5}{4}\pi$ radianes, determine la longitud de arco recorrido por cada uno de los puntos que se ubican en 5 cm, 10 cm ,15 cm y 20 cm.
e. Un estudiante de física afirma que, en un tiempo de 1,24 h la llanta de un automóvil presenta 3240 revoluciones. Cuál es el desplazamiento angular que presenta esta llanta en radianes y en grado.

22) Problemas de velocidad angular en el movimiento circular uniforme

a. Un joven que juega con una de las ruedas de su bicicleta la hace girar con movimiento circular uniforme, de tal manera que esta da sesenta vueltas en 20 s. Si el radio *r* de la rueda es de 34 cm, calcule la rapidez angular media de la rueda, su velocidad angular, su periodo de movimiento, su velocidad tangencial y la aceleración centrípeta de un punto de la rueda.

b. La rueda de una motocicleta se mueve con rapidez tangencial constante V_T. Si a los 4,2 s de su movimiento un observador registra que el ángulo subtendido por uno de sus puntos exteriores es de 660º, y que la distancia radial *r* de su centro al punto es de 30,5 cm, calcule el número de revoluciones dadas por el punto de la rueda a los 4,2 segundos de su movimiento, su periodo de movimiento, el módulo de su velocidad angular, su aceleración centrípeta a los 4,2 s y el valor de V_T.

c. Las aspas de un helicóptero de 3,4 m de longitud se mueven con rapidez tangencial constante de 4,6 m/s. Si en 2,3 s los puntos extremos de sus aspas barren ángulos de 6,2 radianes, determine la velocidad angular media de sus puntos extremos, su periodo de movimiento y sus aceleraciones centrípetas.

d. Una estudiante de física, utilizando luces estroboscópicas, determina que las hélices de una avioneta encendida que se mueven a rapidez constante barren ángulos de 720rad en un tiempo de 2,2 s. Si la longitud de las hélices es de 2,4 m, determine la velocidad angular de las hélices, el número de revoluciones dadas por estas en 2,2 s y su periodo de movimiento.

e. El módulo de velocidad angular de una barra delgada de madera describe un movimiento circular uniforme de 5,6 rad/s. Si la barra gira alrededor de uno de sus extremos y presenta una longitud de 3 m, calcule la velocidad tangencial de los puntos extremos de la barra opuestos al eje de rotación, la aceleración centrípeta de los puntos extremos y el periodo de movimiento de la barra.

23) Problemas de velocidad angular instantánea

a. Un motociclista se mueve sobre una trayectoria circular de radio r = 25 m. La moto del motociclista presenta una función escalar de desplazamiento angular dependiente del tiempo representada por $\theta(t) = (4rad/s^2)t^2 + (2rad/s)t + 2rad$. Calcule la función de velocidad angular del motociclista en función del tiempo, y la velocidad angular de la moto en t = 0,5 s, t = 1 s y t = 1,5 s.

b. Una estudiante de física determina que la función escalar de desplazamiento angular de las llantas de su bicicleta, cuando las pone a rotar, está expresada por: $\theta(t) = (5\ rad/s^3)t^3 + (7\ rad/s^2)t^2$. Calcule el módulo de desplazamiento angular para t=1,2 s, así como la velocidad angular y su módulo cuando la llanta se mueve en el plano *xy*.
c. La función escalar de desplazamiento angular de un auto de carreras que se mueve sobre una pista circular está dada por la expresión $\theta(t) = (-5\ rad/s)t - (8\ rad/s^3)t^3 + 9\ rad$. Determine la velocidad angular del auto de carreras en función del tiempo, y el módulo de velocidad angular para t = 0,6 s y t = 1,4 s. El auto se mueve en el plano *xz*.
d. Una pulidora gira en el plano *xy*. Determine la velocidad angular del disco de la pulidora en función del tiempo, si su función escalar de desplazamiento angular está dada por $\theta(t) = (8\ rad/s^4)t^4 - (3\ rad/s^2)t^2 + 4\ rad$ b). Determine la magnitud de la velocidad angular del disco para t = 1,3 s.
e. La función escalar del módulo de velocidad angular en términos del tiempo de las aspas de un aeroplano que rotan alrededor del eje *zy* está dada por: $w(t) = (10\ rad/s^2)t + (12 rad/s^3)t^2$. Determine el módulo de la velocidad angular de las aspas para t = 0,9 s y t = 1,6 s.

24) Problemas de aceleración angular uniforme

a. Las hélices de un aeroplano que giran en el plano *xy* aceleran desde el reposo (t = 0) hasta alcanzar una rapidez angular de 56,5 rev/min(r.p.m) en 0,4 s. Calcule la aceleración angular media de las hélices y su magnitud.
b. Las aspas de un molino de viento giran inicialmente a rapidez angular constante de 6 rad/s, cuando, de repente, un viento huracanado arrecia sobre él, de modo que en un tiempo de 4 s estas pasan a tener una rapidez angular de 26 rad/s. ¿Cuál es la aceleración angular media de las aspas del molino y su módulo?
c. El disco de una pulidora en un tiempo de 8 s presenta un módulo de aceleración angular constante de 8 rad/s^2. Si en t = 0 la magnitud de su velocidad angular era de 6 rad/s. ¿Cuál es la velocidad angular final del disco y su módulo, al cabo de los 8 s?
d. El motor de un taladro que gira a 240 r.p.s de repente se apaga y se detiene con movimiento uniformemente variado a los 24 s de haberlo desconectado. ¿Cuál la magnitud de su desaceleración angular?
e. El motor de una licuadora de frecuencia 120 hz es desconectada de la energía repentinamente a causa de un apagón en el sector. Si para dete-

nerse con movimiento uniformemente variado emplea un tiempo de 12 s, calcule su aceleración angular y su magnitud si sus aspas se mueven en el plano *xz*.

25) Problemas de aceleración total en el m.c.u.a.

a. La rueda giratoria de un parque de diversiones presenta un radio r = 54 cm. Esta se gira desde el reposo y origen de coordenadas, alcanzando en un tiempo t = 6 s una rapidez angular ω = 2,44 rad/s, sufriendo además una magnitud de desplazamiento angular θ = 4,.2 rad. Calcule la aceleración centrípeta de un punto exterior de la rueda en t = 5 s, su aceleración tangencial, su aceleración neta, y la magnitud de cada una de las aceleraciones pedidas.
b. Un disco de pulidora de diámetro 10,4 cm, partiendo del reposo, emplea 8,2 s en adquirir una velocidad angular constante de 120π rad/s. Calcule la aceleración tangencial del disco, su aceleración centrípeta, su aceleración neta, su aceleración angular, y la magnitud de cada una de estas aceleraciones si el disco gira en el plano *xy*.
c. El disco de una pulidora que se mueve a velocidad angular constante de 12π rad/s, es acelerada uniformemente durante 3 s, de modo que adquiere una velocidad angular en este tiempo de 20π rad/s. Calcule su aceleración angular en este tiempo, su aceleración centrípeta y tangencial, y su aceleración neta.
d. Un estudiante de física que arreglaba su bicicleta decide probar su funcionamiento y para esto, con sus pedales decide acelerarla durante 12,4 s con aceleración angular constante de 1,2π rad/s^2, cuando de repente la tachuela que estaba incrustada en la llanta sale disparada. ¿A qué velocidad tangencial aproximada sale disparada la tachuela, si los radios de la rueda de la bicicleta miden 38 cm? Determine la aceleración neta de la rueda, si esta rota en el plano *xy*.
e. Si el estudiante de física del ejercicio anterior quisiera que la tachuela saliera disparada con el doble de su velocidad tangencial, ¿cuánto tiempo tendría que emplear el estudiante de física en hacer girar la rueda?
f. La rueda de una bicicleta de radio 38 cm gira a 260 r.p.m., cuando de repente se le aplican los frenos, y emplea un tiempo de 14 s en detenerse. Calcule el número de vueltas dadas en los 14 s, la velocidad angular de la rueda el instante antes de que le aplicaran los frenos y su aceleración neta de frenado.

Referencias

[1] C. Gutiérrez, "Movimiento en una dimensión", en *Física general*, J. Rodriguez y L. A. Valdez, Eds. México: McGraw Hill, 2009, pp. 50-72.

[2] D. E. Roller y R. Blum, "Cinemática de las particulas I y II", en *Mecánica, ondas y termodinámica*, J. de la Rubia y J. Aguilar, Eds. Barcelona: Reverté, 1983, pp. 45-87.

[3] R. Serway, "Movimiento en una dimensión", en Física, G. Nagore, E. Cruz y J. Brenes, Eds., 4ª ed. México: McGraw Hill, 1997, pp. 23-41.

[4] S. Gartenhaus, "Cinemática: en una dimensión y bidimensional", en *Física 1. Mecánica*, A. Contin, Ed. México: N. E. Interamericana, 1979, pp. 21-62.

[5] M. Alonso y E. J. Finn, "Cinemática", en *Física. Volumen I: mecánica*, C. Hernandez, V. Latorre y J. Herkrath, Eds. Wilmington EE. UU.: Addison-Wesley Iberoamericana S, 1986, pp. 86-112.

[6] L. Vargas, "Cinemática", en *Física fundamental*, G. Solano y J. C. Serna, Eds. Barranquilla, Colombia: Prisma Publicación, 1991, pp. 12-21.

[7] D. C. Giancoli, "Descripción del movimiento: cinemática en una dimensión", en *Física para ciencias e ingenierías*, R. Fuerte, Ed., 4ª ed. México: Pearson Educación, 2008, pp. 19-40.

[8] F. P. Beer, E. R. Johnston y E. R. Eisenberg, "Estática de particulas", en *Mecánica vectorial para ingenieros: estática*, R. A. del Bosque y P. E. Roig, Eds., 8ª ed. México: McGraw Hill, 2007, p. 2.

[9] P. A. Tipler, "Movimiento en una dimensión, dos y tres dimensiones", en *Física*, J. Aguilar y J. de la Rubia, Eds. Barcelona: Reverté, 1977, pp. 21-81.

[10] F . W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman, "Movimiento en línea recta, dos o tres dimensiones", en *Física universitaria*, R. García y J. Lomas, Eds., Vol. I, 11ª ed. México: Pearson Educación, 2004, pp. 41-107.

[11] F. Bueche, "Descripción de las mediciones", en *Fundamentos de física I*, G. Zetina, A. R. Ortiz y R. Barbosa, Eds., 3ª ed. México: McGraw Hill, 1984, p. 11.

[12] P. A. Tipler y G. Mosca, "El movimiento en una dimensión", en *Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica*, A. Bramón y J. Casas, Eds., 5ª ed. Barcelona: Reverté, 2006, pp. 18-33.

[13] J. D. Wilson, A. J. Buffa, y B. Lou, "Cinemática: descripción del movimiento", en *Física*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds., 6ª ed. México: Pearson Educación, 2007, pp. 32-36.

[14] H. Pérez, "Vectores", en *Física general*, J. Callejas y A. Sámano, Eds., 4ª ed., México: Grupo Editorial Patria, 2014, pp. 49-50.

[15] A. M. Sanchéz, "Cinemática" en *Física: guía para el estudiante*, J. E. Villa y E. Parada, Eds. México: Academia Institucional de Física del Instituto Politécnico Nacional, 2010, pp. 53-90.

[16] L. K. Branson, "Cinemática de una partícula", en *Mecánica: para estudiantes de ingeniería*, L. Alava, L. C. Díaz y J. Montiel, Eds. Nueva York EE.UU.: Fondo Educativo Interamericano, 1973, pp. 158-179.

[17] J. L. Lorente y A. Rueda, "Fundamentos: cinemática", en *Física*, C. Suárez, Ed. Tomo 1, 4ª ed. Madrid: Aguilar, 1999, pp. 61-94.

[18] J. D. Cutnell y K. W. Johnson, "Cinemática: en una y dos dimensiones", en *Física*, H. Villagomez, Ed., 2ª ed., México: Limusa Wiley, 2004, pp. 41-78.

[19] R. Resnick, D. Halliday y K. S. Krane, "Movimiento unidimensional", en *Física*, J. Wiley, Ed., Vol. 1, 3ª ed. México: Compañía Editorial Continental, 1993, pp. 17-31.

[20] F. W. Sears y M. W Zemansky, "Movimiento rectilíneo, relatividad restringida", en *Física*, A. Yusta, Ed. Madrid: Aguilar, 1972, pp. 62-90.

[21] W. Hauser, "Cinemática de la partícula", en *Introducción a los principios de mecánica*, C. Ordoñez y S. Alonso, Eds. México: Addison-Wesley Hispanoamericana, 1969, pp. 37-58.

[22] S. M. Lea y J. R. Burke, "Cinemática", en *Física Vol. 1. La naturaleza de las cosas*, M. A. Toledo y R. Garay, Eds. México: International Thomson Editores, 1999, pp. 53-71.

[23] E. Hecht, "Cinemática: rapidez, velocidad y aceleración", en *Física 1. Algebra y trigonometría*, M. A. Toledo, P. de la Garza y R. Garay, Eds., 2ª ed., México: International Thomson Editores, 2000, pp. 21-55.

[24] P. G. Hewitt, "Movimiento rectilíneo", en *Física conceptual*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds. 10ª ed. México: Pearson Educación, 2007, pp. 41-51.

[25] R. A. Serway y J. W. Jewett, “Movimiento en una dimensión”, en *Física para ciencias e ingenierías*, S. R. Cervantes y A. Vega., 7a ed. Eds. México D. F: Cengage Learning, 2008, pp. 19-46.

[26] A. Lara, H. Nuñez, C. Cerpa y A. Chávez, “Movimiento,” en *Introducción a la física*, J. Callejas y E. Delfín, Eds. México D. F: Grupo Editorial Patria, 2014, pp. 9-48.

[27] H. Medina, “Movimiento rectilíneo,” en *Física 1*, Lima, Perú: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 2010, pp. 39-59.

[28] F. j. Bueche y E. Hecht, “Movimiento uniformemente acelerado”, en *Física general*, R. Del Campo y L. A. Valdez, Eds., 10ª ed. México D. F: McGraw-Hill Interamericana, 2007, pp. 13-14.

[29] A. H. Cromer, “Dinámica”, en *Física para las ciencias de la vida*, 2ª ed., J. Casas y D. D. Jou, Eds. Barcelona: Editorial Reverte, 1984, pp. 70-84.

[30] D. A. Wells y H. S. Slusher, “Movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante,” en *Física para ingeniería y ciencias*, A. Ortíz y M. I. Alcérreca, Eds. México D. F: McGraw-Hill, 1985, pp. 13-21.

[31] A. Beiser, “Movimiento rectilíneo,” en *Física aplicada*, Y. J. Francis y M. C. Ruiz, Eds., 2ª ed., México D. F: McGraw-Hill Interamericana, 1991, pp. 28-29.

[32] M. Figueroa y R. Guzmán, “Mecánica”, en *Física*, 1eFirmas Press, 2001, pp. 19-34.

[33] J. L. Trenzado, “Aplicaciones de las leyes de Newton, peso, normal, fuerza de rozamiento y ley de Hooke”, en *Física*, N. Quintana, Ed. Las Palmas, Gran Canarias: Dilve, Une, 2014, pp. 112-124.

[34] A. Manzur, “Experimento de demostración 2”, en *Experimentos de demostración: ejemplo de mecánica elemental*, M. M. Contreras, Ed., 2ª ed. México, D. F.: Plaza y Valdés, 2009, pp. 21-28.

[35] R. Cabrera, “Cinemática”, en *Ejercicios de física*, Buenos Aires: Eudeba, 2010, pp. 9-25.

[36] W. Bauer y G. D. Westfall, “Movimiento en línea recta, en dos y tres dimensiones”, en *Física para ingeniería y ciencias*, P. E. Roig y M. I. Rocha, Eds., Vol. 1. México: McGraw Hill, 2011, pp. 36-84.

[37] F. García y F. Manteca, “Composición de movimientos”, en *Física y química*, J. A. Olmedo y L. Medina, Eds. Madrid, España: Ministerio de Educación de España, 2010, pp. 57-59.

[38] L. Arrascue, “Cinemática”, en *Física mecánica,* G. Vargas, G. Ruiz y D. Patrón, Eds. Lima, Perú: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, 2015, pp. 77-166.

[39] V. A. Mendoza, A. E. Garcia y D. Reich, “Cinemática”, en *Física: teoría, ejemplos y problemas*, J. E. Callejas, E. Delfín y G. Briones, Eds. México, D. F: Grupo Editorial Patria, 2014, pp. 32-53.

[40] R. Gánem, R. M. Guadalupe y A. E. García, “Cinemática de partículas”, en *Dinámica: las leyes del movimiento*, J. E. Callejas y E. Delfín, Eds. Monterrey, México: Grupo Editorial Patria, 2014, pp. 21-84.

[41] C. F. Gonzáles, “Cinemática”, en *Fundamentos de mecánica,* Barcelona: Editorial Reverte, 2012, pp. 31-63.

[42] J. W. Kane y M. M. Sternheim, “Movimiento en dos dimensiones”, en *Física*, J. Casas y D. Jou, Eds., 2ª ed. Barcelona, España: Editorial Reverte, 2016, pp. 28-45.

[43] R. Gotze, “Mecánica de los cuerpos sólidos”, en *Elementos de física matemática: Tomo I*, D. Guerra, Ed. México: Instituto Politécnico Nacional, 2010, pp. 4-74.

[44] H. Pérez, “Bloque 2: identifica diferencias entre distintos tipos de movimiento”, en *Física I*, J. E. Callejas y A. Sámano, Eds., 2ª ed., México D. F.: Grupo Editorial Patria, 2016, pp. 80-152.

[45] P. Español, M. Serrano e I. Zúñiga, “Tema 1: cinemática”, en *Mecánica clásica*. Madrid, España: UNED, 2015, pp. 16-53.

[46] C. Kittel, W. D. Knight y M. A. Ruderman, “Vectores”, en *Mecánica*, J. Aguilar y J. de la Rubia, Eds., 2ª ed. Barcelona, España: Editorial Reverte, 1982, pp. 30-52.

Unidad 4

Dinámica

Resumen

En esta unidad se estudia el movimiento de los cuerpos en conformidad con las causas que lo producen. De acuerdo con lo anterior, se tratan temas tales como el concepto de dinámica, el concepto de fuerza, la clasificación y los tipos de fuerzas, las leyes de Newton, el diagrama de cuerpo libre, las fuerzas aplicadas en diferentes tipos de movimiento, el torque, el equilibrio de un cuerpo, etc.

Palabras clave: diagrama de fuerzas, dinámica, equilibrio, fuerza, leyes de Newton, torque, movimiento.

A. Introducción

En el capítulo anterior se realizó un análisis del movimiento de cuerpos enfocado, más que todo, en el movimiento en una y dos dimensiones, es decir, el movimiento a lo largo de una línea o de un plano. Además, a través de los obsevables físicos conocidos como "desplazamiento", "velocidad" y "aceleración", se hizo posible la descripción del movimiento de objetos sin tener en cuenta la causa que lo generaba. En este capítulo se presenta un estudio completo de estas causas y su relación con el movimiento. Por otra parte, se puede afirmar que la dinámica es la parte de la física mecánica encargada no solo del análisis de movimiento de cuerpos, sino también del estudio de las fuerzas. Estas últimas son las que directamente se encuentran implicadas en causar cambios físicos en ellos o modificar su estado de inercia.

B. Concepto de dinámica

De acuerdo con [1], la dinámica estudia el movimiento de los cuerpos y las fuerzas que son las causantes de éste. Para [2], ésta es la encargada de determinar y predecir cómo se moverá el cuerpo cuando es sometido a un sinnúmero de situaciones físicas puntuales (fuerzas). Según [3], la dinámica estudia la relación existente entre el movimiento de los cuerpos y las fuerzas que actúan sobre él.

1) Concepto de fuerza

Siempre que una persona desee mover un cuerpo que inicialmente se encuentra en reposo debe aplicarle una fuerza, ya que, de acuerdo con [4], éstas son las que pueden modificar el movimiento o el estado inercial de éste, además de poder alterar su forma física. Para [3], se considera fuerza todo aquello que haga que un cuerpo en particular sufra una aceleración. En [5] se define la fuerza desde el punto de vista matemático como la derivada del momentum con respecto al tiempo, es decir, $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$.

Por otra parte, es posible observar los efectos que producen estas fuerzas, pero no logramos observarlas a simple vista, ya que, por lo general, no son visibles al ojo humano. Por ejemplo, cuando se hala el extremo libre de un resorte al cual previamente se le ha dejado el otro fijo, se observa que se le provoca una deformación. De igual manera, cuando un carrito de mercado se encuentra en reposo y lo empujamos le causamos un movimiento. Algunas veces la fuerza aplicada a un cuerpo puede generarle, además de un cambio en su estado de movimiento, una deformación. Esto último ocurre, por ejemplo, cuando una pelota de goma es pateada y sufre de manera simultánea una aceleración y una alteración de su forma geométrica.

De acuerdo con lo expresado en [1], [2], [3], [4] y [5], toda fuerza existente en la naturaleza, sin excepción, presentan las siguientes propiedades:

- Las fuerzas son vectores, ya que se caracterizan por su magnitud, su dirección y su sentido, además de un punto de aplicación. Por ejemplo, cuando se aplica una fuerza a una puerta esta se cerrará o abrirá, dependiendo de la dirección en la que se ejerza. De igual manera, cuando un jugador patea una pelota de fútbol su movimiento dependerá no solo de la magnitud y la dirección de la fuerza, sino también del punto en el que se aplica.
- Siempre que un cuerpo 1 aplique una magnitud de fuerza f_1 en determinada dirección a un cuerpo 2, de manera simultánea el cuerpo 2 le aplicará al cuerpo 1 otra magnitud de fuerza f_2 de igual magnitud a f_1, es decir ($f_2 = f_1$); sin embargo, las fuerzas como tal son ejercidas en dirección contraria, es decir, esta son totalmente diferentes (véase la Fig. 170).

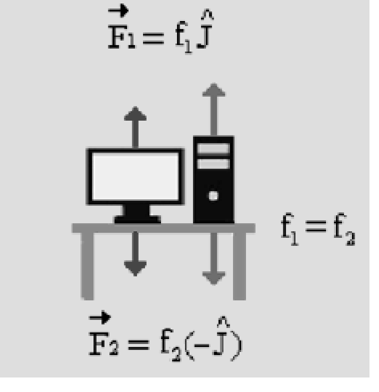


Figura 170. Mesa ejerciendo una magnitud de fuerza f_1 hacia arriba sobre la pantalla y la CPU de un computador. Mientras que la pantalla y su CPU ejercen una magnitud de fuerza hacia abajo f_2. Las magnitudes de las fuerzas son iguales pero tienen direcciones contrarias.
Fuente: elaboración propia

- La fuerza que se ejerce sobre un cuerpo puede causarle una deformación. Esto último dependerá de la magnitud de la fuerza y de las propiedades elásticas del material del que está hecho. Por ejemplo, cuando una hoja de papel se convierte primero en una pelota, y luego se aprieta con las manos, sufre una doble deformación debido a las fuerzas aplicadas en los dos casos citados.

- Una fuerza ejercida sobre un cuerpo puede producirle un cambio notorio en su velocidad, es decir, una aceleración. Así, por ejemplo, un carrito de mercado que inicialmente se encuentra en reposo adquiere una aceleración al aplicarle una fuerza suficiente que le produzca un cambio en su estado inercial, ya que con esta se le está variando la magnitud de su velocidad, es decir, se parte desde $v = 0$ hasta cualquier otro valor $v \neq 0$.

Las fuerzas que se aplican, por lo general, a los cuerpos, se clasifican en fuerzas internas y fuerzas externas. Según [4], las primeras son las que se llevan a cabo microscopicamente en él, es decir, se dan en su interior a nivel molecular y atómico. Éstas se encargan internamente de mantener unidas las moléculas, como, por ejemplo, los átomos del cuerpo, y son más que todo de tipo eléctricas. Mientras las segundas, de acuerdo con [1], son las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en estudio debido a los otros cuerpos externos que están a su alrededor. Estas son las responsables de alterar, más que todo, su estado de movimiento y se pueden presentar debido al contacto entre los cuerpos o la distancia, a causa de fuerzas como la de la gravedad.

En esta sección se tratan, sobre todo, las fuerzas de tipo externas. Así, por ejemplo, cuando analizamos todas las fuerzas que actúan sobre un carrito tipo patineta, el cual es empujado por una persona (como se muestra en la Fig. 171), observamos que cada una de las fuerzas aplicadas sobre éste son las llamadas "fuerzas externas", que en este caso son: la fuerza de gravedad ($\vec{F}_g$), la fuerza de empuje ($\vec{F}_e$), la fuerza normal ($\vec{F}_n$), y la fuerza de rozamiento ($\vec{F}_r$).

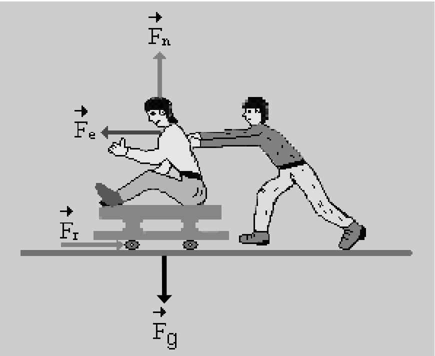


Figura 171. Las fuerzas externas que actúan sobre la patineta son: la fuerza de empuje ejercida por el compañero de la persona que está sobre la patineta, la fuerza de gravedad que se produce a causa del campo gravitacional terrestre, la fuerza de rozamiento debida a la superficie no lisa por la cual se traslada la patineta, y, por último, la fuerza normal ejercida hacia arriba por la superficie en la que descansa la patineta. Fuente: elaboración propia

a) Clasificación de las fuerzas externas

De acuerdo con [4], aunque, por lo general, la mayoría de las fuerzas conocidas son de acción a distancia, entre éstas se pueden considerar las fuerzas de contacto. Así, es conveniente —en razón a que en este texto se tratan, fundamentalmente, fenómenos físicos de carácter macroscópico— dividir las fuerzas externas conocidas por el hombre de ciencia —que se presentan entre los cuerpos ubicados en un medio determinado— en fuerzas de acción a distancia y fuerzas de contacto. Las fuerza de acción a distancia, según [1], se presentan cuando dos cuerpos interactúan sin necesidad de haber contacto físico entre ellos. De esto último se puede afirmar que entre el espacio que separa los cuerpos involucrados no debe encontrarse medio material alguno interpuesto entre ellos. Por ejemplo, la fuerza de interacción entre el Sol y la Tierra, o entre la Luna y el Sol pertenece a esta clase de fuerzas. Otro tipo de fuerza que se considera de acción a distancia la observamos cuando dos imanes se acercan entre sí, sin que estos lleguen a tocarse durante el proceso, tal como se muestra en la Fig. 172.

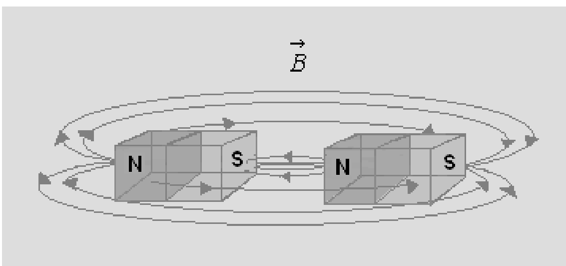


Figura 172. Líneas de fuerza magnética entre dos imanes que se encuentran en una región del espacio. La fuerza de interacción entre los dos imanes se realiza a distancia, es decir, no existe contacto físico entre ellos. Fuente: elaboración propia

El segundo tipo de fuerza (fuerza de contacto), de acuerdo con [3], se presenta solo cuando un cuerpo externo se encuentra en contacto físico o directo con el cuerpo en estudio u observación. Por ejemplo, cuando con las manos empujamos directamente una mesa que se encuentra estorbando en la sala de nuestra casa.

De acuerdo con su naturaleza, las fuerzas presentan la siguiente clasificación:

- Fuerza nuclear débil.
- Fuerza nuclear fuerte.
- Fuerza electromagnética.
- Fuerza gravitacional.

Los conceptos físicos básicos presentes en estos tipos de fuerzas son los siguientes:

- *La fuerza nuclear débil.* Se lleva a cabo en los núcleos de los átomos. Además, debido al control que ésta ejerce en las reacciones nucleares presentes en el Sol, modera la vida media de éste. A este tipo de fuerza se le atribuye también la denominada “desintegración beta” [1].
- *La fuerza nuclear fuerte.* Así como la fuerza nuclear débil se presenta en el nucleo de los átomos, se dice que sin su existencia la estabilidad de los núcleos corre riesgo y no podrían existir. De lo anterior se puede concluir que esta fuerza es la responsable de la unión entre los neutrones y protones, los cuales se encuentran presentes en el núcleo de los átomos [3].
- *La fuerza electromagnética.* Es la causante de la fuerza de atracción y de acercamiento que existe entre las partículas elementales conocidas como “protones” y “electrones”, las cuales se encuentran presentes en el interior del átomo. La existencia de esta fuerza se le atribuye a una propiedad de la materia conocida como “carga eléctrica”, en la cual esta última puede tener signo positivo o negativo. Dependiendo del signo de las cargas, la fuerza de interacción electromagnética entre ellas puede ser de atracción o de repulsión (si las cargas son de igual signo se repelen, si son de diferente signo se atraen) [4] (véase la Fig. 173). Cuando en una partícula cargada actúa una fuerza electromagnética se dice que sobre ella influye de manera simultánea una fuerza de tipo eléctrica y otra magnética.

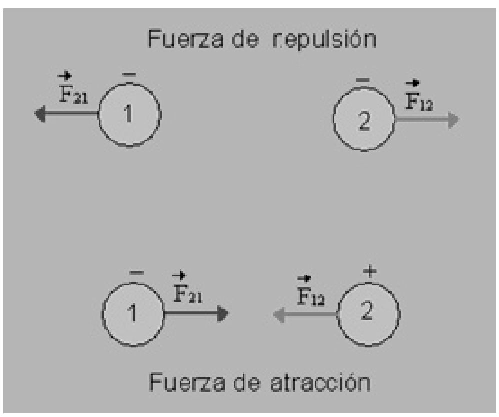


Figura 173. Fuerza de repulsión entre dos cargas de igual signo (en este caso ambas son negativas), y fuerza de atracción entre dos cargas de diferentes signos.
Fuente: elaboración propia

- *La fuerza gravitacional.* Es una fuerza de tipo atractiva y se presenta cuando dos cuerpos ubicados en la misma región del espacio interactúan entre sí, debido a la acción de sus campos gravitacionales, generados estos últimos a causa de sus masas. La magnitud del campo gravitacional de un cuerpo en un punto determinado depende de la distancia relativa en que se encuentre respecto al punto. Esta fuerza se considera de carácter universal y es responsable de que los satélites, como, por ejemplo, la Luna, estén sujetos a la Tierra. De igual manera, de que todos los objetos, árboles y animales, se mantengan sobre la superficie terrestre [1] (véase la Fig. 174).

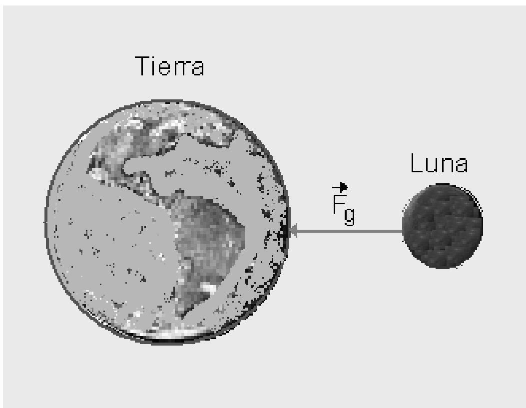


Figura 174. Fuerza de gravedad terrestre actuando sobre un cuerpo como la Luna.
Fuente: elaboración propia

Esta unidad se ocupa, sobre todo, de estudiar y aplicar la última de las fuerzas tratadas en los párrafos anteriores, es decir, la fuerza de tipo gravitatoria. Esta fuerza es la más débil de todas pero la más evidente, ya que en cada momento podemos sentir y observar el efecto que ejerce sobre todo cuerpo que se encuentra sobre la superficie terrestre.

Las unidades de medidas de fuerza más comunes y utilizadas para representarlas son la dina y el newton. De acuerdo con [5], esta última unidad de medida de fuerza se define como la aceleración de $1 m/s^2$ que se le ejerce a un cuerpo de 1 kg de masa. Ambas son unidades derivadas y están expresadas por medio de las unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo de la siguiente manera:

$$1\text{Newton} = 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\,;\ 1\text{Dina} = 1\,\frac{\text{gr}\cdot\text{cm}}{\text{s}^2}$$

b) Concepto de fuerza de fricción

Aunque en el capítulo anterior se citó la fuerza de rozamiento en el caso en que un cuerpo se deslizaba sobre una superficie inclinada, se requiere profundizar más en el asunto con el fin de que el estudiante, además de obtener mayor claridad en el tema, utilice este conocimiento en la solución de problemas en los que se encuentre implicada este tipo de fuerza. En física I se conoce como "fuerza de fricción", según [6] y [7], a aquella que se opone al movimiento de todo objeto. El origen de este tipo de fuerza se debe a los enlaces moleculares que existen entre los cuerpos que se encuentran en contacto directo, en los que esta trata de mantenerlos o llevarlos a velocidad cero, es decir, busca asegurarse de que el estado inercial de estos sea siempre el de reposo total. Las fuerzas de rozamiento se encuentran presentes en los cuerpos en contacto directo, aunque ambos muestren un estado de reposo total. No obstante, los casos más palpables de este fenómeno físico para el ojo humano se dan cuando se busca deslizar sobre una superficie rústica un cuerpo, o cuando éste se mueve en un medio tipo fluido (como, por ejemplo, el aire, el agua, un gas, etc.).

Si no existieran las fuerzas de rozamiento al hombre y a cualquiera de los animales terrestres se les haría imposible caminar sobre la superficie de la tierra, ya que esta es la que nos impulsa cuando afianzamos nuestros pies al piso tratando de deslizarlos sobre este. La fricción se lleva a cabo debido al contacto físico entre dos cuerpos o medios tales, como, por ejemplo, líquido y líquido (agua-aceite), sólido y sólido (llanta-suelo), sólido y gas (la pérdida de velocidad que sufre una pelota de béisbol en su recorrido al ser bateada), sólido y líquido (la pérdida de velocidad que sufre un clavadista al hacer contacto con el agua), etc. Cabe aclarar que en este texto solo se considerarán problemas en los que se involucren cuerpos sólidos.

Por otra parte, si tomáramos un microscopio y en él se observara una superficie supuestamente lisa al tacto y a la visión del hombre, nos daríamos cuenta de que esto no es verdad, ya que veríamos que es rugosa o que presenta asperezas. Esto quiere decir que cuando hablamos de superficie lisa nos estamos refiriendo a una superficie ideal, es decir, en la vida real no existe. Las fuerzas de fricción que trataremos en este texto se clasifican en estática, cinética y de rodamiento.

La fuerza de fricción estática es la responsable de que a una persona se le dificulte poner en movimiento un cuerpo que se encuentra inicialmente en reposo sobre una superficie rugosa, independientemente del valor de la fuerza de empuje aplicada a él. Según [7], esta fuerza es paralela a las dos superficies en contácto directo y se encuentra aplicada a estas aunque no exista un movimiento relativo entre ellas. Este tipo de fuerza evita el deslizamiento de sólidos en contactos cuando sus superficies se encuentran sin lubricación y secas. Siempre que se quiera mover un cuerpo sobre una superficie no lisa se debe vencer inicialmente la fuerza de fricción estática. Esta fuerza es palpable en el momento en que una fuerza externa comienza a actuar sobre uno de los cuerpos en contacto, tal como se muestra en la Fig. 175.

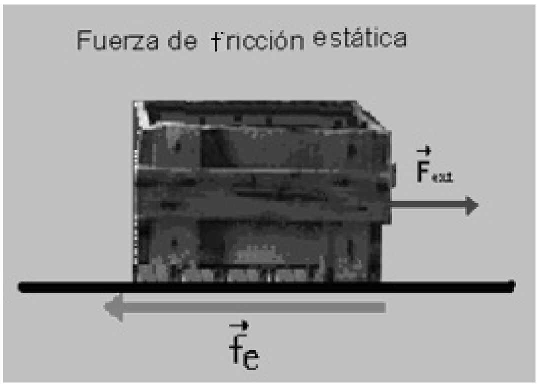


Figura 175. En el momento en que se le aplica a la caja en reposo una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$, la fuerza de rozamiento entre ésta y la superficie sobre la cual descansa actúa en sentido contrario. Si la fuerza externa aplicada no es superior en magnitud a la fuerza de rozamiento el cuerpo no se moverá. Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con [7], cuando un cuerpo en movimiento se desliza sobre una superficie rugosa sobre éste actúa una fuerza de rozamiento conocida como "fuerza de fricción cinética". Ésta siempre se encuentra dirigida en sentido opuesto al movimiento y donde la naturaleza de las superficies de contacto de los cuerpos son determinantes en el valor de su magnitud. Se considera, además, que esta fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal, la cual es perpendicular a la superficie de contacto común y se genera de acuerdo a como se entiende la fuerza, esto es, como la acción de un cuerpo sobre el otro. Se puede afirmar también que el valor de la fuerza de fricción cinética es mucho menor que la magnitud máxima de la fuerza de fricción estática, es decir, cuando el objeto se encuentra en movimiento se tiene que realizar un menor esfuerzo para mantenerlo en el estado inercial que presenta en relación a cuando se le busca crear el movimiento y se encuentra inicialmente en reposo.

Por otra parte, al estudiar las fuerzas de fricción es necesario tener presente que cuando un cuerpo descansa sobre una superficie rústica, y además no se está ejerciendo fuerza sobre él con el fin de hacerlo deslizar, la fuerza de fricción estática es cero. Así, cuando se busca mover el objeto la fuerza de fricción estática entra en acción oponiendose a la fuerza externa aplicada. Ahora, si la magnitud de esta última no es lo suficientemente grande, el cuerpo no se moverá y se considerará que las dos fuerzas tienen igual magnitud, pero apuntan en sentidos opuestos. Además, si la fuerza de empuje rebasa cierto valor límite, el cual viene siendo el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático, el cuerpo comenzará a moverse y sobre éste actuará la fuerza de fricción dinámica. En la Fig. 176 se muestra un elefante, al cual, al rebasar la fuerza de rozamiento estático que presenta la caja de madera con respecto al piso, le crea un movimiento, y es en este instante en que comienza actuar la fuerza de rozamiento cinético tratando de evitarlo.

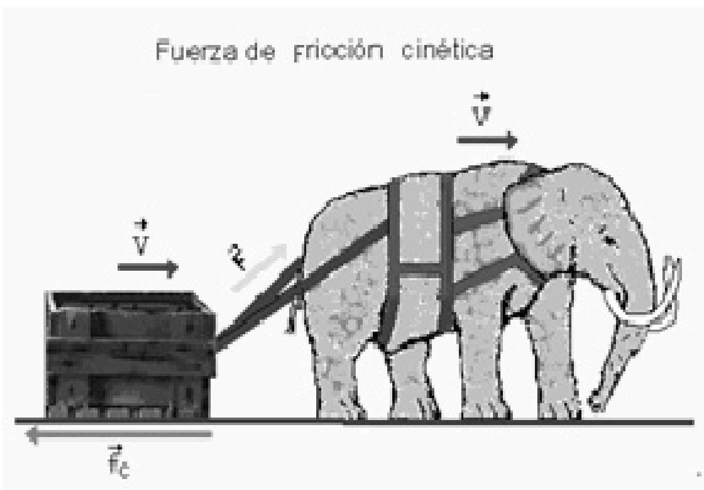


Figura 176. El elefante ejerce una fuerza externa $\vec{F}$ sobre una caja que se encuentra sobre una superficie no lisa. Esta fuerza es mucho mayor que la fuerza de rozamiento estática que existe entre la caja y el piso, por tanto, presenta una velocidad diferente de cero. En este caso la fuerza de fricción que se opone al movimiento de la caja es la fuerza de fricción cinética.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con lo expresado en [1] y [7], la fuerza de fricción por rodamiento se considera más que todo en los cuerpos esféricos o cilíndricos (por ejemplo, en una rueda), cuando a estos se les hace rodar sobre una superficie rústica plana o cuando, al estar en movimiento uno con respecto al otro, entran en contacto directo entre sí, generándose a causa de esto y como se indica en [9] la llamada "fuerza de contacto por rodamiento". De todo lo expresado se puede afirmar que existe la fuerza de fricción por rodamiento cuando se tocan: un cilindro con un cilindro, una esfera con otra esfera o una esfera y un cilindro. Así como la fuerza de fricción cinética es menor que la fuerza de fricción estática, la fuerza de fricción por rodamiento es menor que ambas. Lo anterior debido a que la superficie de contacto entre la rueda y el piso es mucho menor que los dos casos anteriores (véase la Fig. 177).

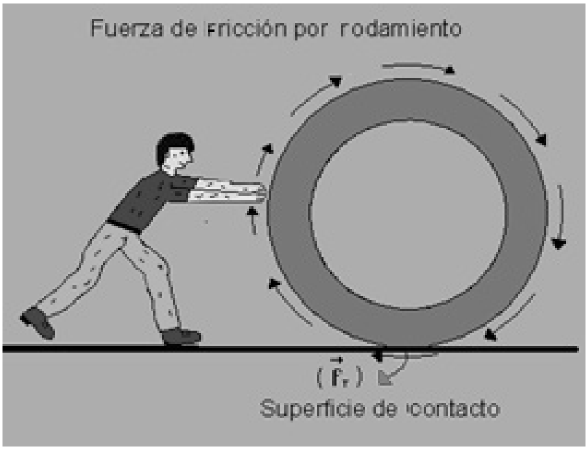


Figura 177. La persona hace rodar un cuerpo cilíndrico sobre una superficie rústica. Durante el movimiento, sobre este se ejerce una fuerza de fricción por rodamiento debido a su contacto directo con la superficie. Fuente: elaboración propia

Cuando tenemos un piso seco y queremos deslizarno sobre él, observamos que no es facil lograr este objetivo. Sin embargo, si derramamos agua con detergente sobre la superficie del piso y, aunque el área de contacto sea la misma para ambos casos, se puede ver que el deslizamiento en el piso se realiza de manera facil. Al igual que en el caso anterior, es posible decir que no es lo mismo tratar de deslizarse sobre una superficie de hielo que en el pavimento de nuestra calle. Se encuentra que en la primera nos movemos de forma más libre que en la segunda. Se concluye, entonces, que de acuerdo con las condiciones físicas presentada por la superficie, esta tiene un grado de dificultad mayor o menor para desplazarnos en ella. Este grado de dificultad o facilidad con que una superficie permite o no el deslizamiento de un cuerpo depende y es determinado por su coeficiente de fricción μ.

La superficie del hielo en condiciones físicas normales presenta un coeficiente de fricción menor que el concreto del cual esta hecho el pavimento de nuestra calle. Esto nos lleva a deducir que a menor coeficiente de fricción menor fuerza de fricción y viceversa. Además, como es de conocimiento, a una persona se le facilita más mover por el piso objetos de poco peso que pesados. Se puede decir entonces que la fuerza de fricción depende de la fuerza normal que la superficie ejerce sobre el cuerpo que se desliza y descansa sobre ella.

Al tener presente lo expresado en los párrafos anteriores, la fuerza de fricción entre dos cuerpos en movimientos relativo y contacto físico es proporcional a la fuerza normal $(\vec{N})$ y al coeficiente de fricción (μ) perteneciente a la superficie de deslizamiento. De acuerdo con [6], [7] y [10], la ecuación matemática vectorial que la representa está dada por:

$$\vec{F} = \mu\vec{N} \qquad (173)$$

Donde,

- $\vec{F}$: representa la fuerza de rozamiento.
- μ: representa el coeficiente de fricción.
- $\vec{N}$: es la fuerza normal que la superficie de deslizamiento ejerce sobre el cuerpo.

El hecho de que existan diferentes tipos de fuerzas de fricción nos indica que deben existir también varios tipos de coeficientes de fricción. Estas fuerzas se representan a través de las siguientes ecuaciones, de acuerdo con [1], [2], [3] y [10], de la siguiente manera:

- La siguiente ecuación representa la fuerza de fricción estática máxima:

$$\vec{F}_e = \mu_e N\hat{r}_e \qquad (174)$$

- La siguiente ecuación representa la fuerza de fricción cinética:

$$\vec{F}_c = \mu_c N\hat{r}_c \qquad (175)$$

- La siguiente ecuación representa la fuerza de fricción de rodamiento:

$$\vec{F}_r = \mu_r N\hat{r}_r \qquad (176)$$

Donde, de acuerdo con lo expresado en los párrafos anteriores, se concluye que:

$$\vec{F}_e > \vec{F}_c > \vec{F}_r$$

Dado que la fuerza normal que actúa sobre el cuerpo que se encuentra sobre la superficie es constante, de la expresión de desigualdad de fuerzas indicada en la parte de arriba se obtiene que:

$$\mu_e > \mu_c > \mu_r$$

Donde:

- μ_e: es el coeficiente de fricción estático.
- μ_c: es el coeficiente de fricción cinético.
- μ_r: es el coeficiente de fricción de rodamiento.

C. Conceptos de las leyes de Newton

Las tres leyes de Newton son muy importantes en el estudio de la dinámica de los cuerpos, ya que con estas, además de explicar sus movimientos, es posible también analizar las causas que los generan y sus efectos. Estas leyes se denominaa "ley de inercia", "ley de fuerzas" y "ley de acción y reacción". A continuación, se definen conceptualmente cada una de ellas.

1) Primera Ley de Newton: ley de inercia

De acuerdo con [11], [12] y [13], la Primera Ley de Newton se define de la siguiente manera: "Todo cuerpo mantiene su estado de reposo (V = 0) o de movimiento rectilíneo uniforme (V = constante) a no ser que fuerzas externas lo obliguen a cambiar su estado inicial". Newton, en esta ley, afirma que si se le quiere cambiar el estado de reposo o de velocidad constante a un objeto se le debe aplicar una fuerza externa. Es decir, solo las fuerzas aplicadas por agentes externos pueden alterar el estado inicial del cuerpo, por tanto, él mismo no puede aplicarse una fuerza.

Así, por ejemplo, en la Fig. 178 se observa una persona en reposo, es decir, su velocidad es cero. Según Newton, solo una fuerza externa puede sacarlo de este estado.

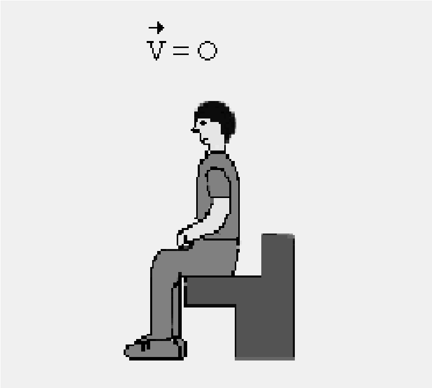


Figura 178. Persona sentada en una banca de parque, su estado físico cinético es de reposo. Fuente: elaboración propia

De igual manera, en la Fig. 179 se muestra una persona en movimiento sobre una pista de hielo a velocidad constante $\vec{V}$; para cambiar su estado de movimiento rectilíneo uniforme también debe aplicarsele una fuerza externa.

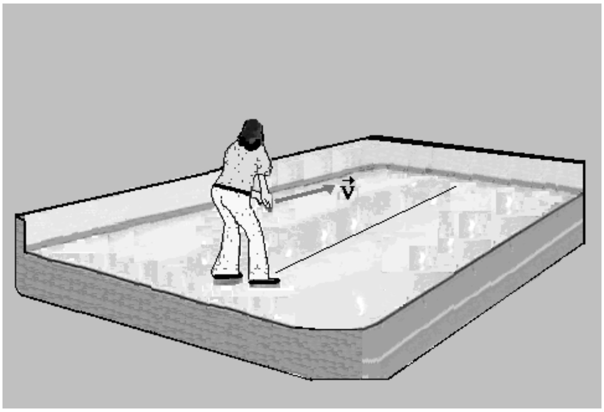


Figura 179. Persona moviendose a velocidad constante $\vec{V}$ sobre una pista de hielo. Describe un movimiento rectilíneo uniforme debido a su estado de movimiento. Si se le quiere cambiar su estado físico debe aplicarsele una fuerza externa. Fuente: elaboración propia

2) Segunda Ley de Newton: ley de fuerzas

De acuerdo con [5], "a la razón de cambio del momento lineal con respecto al tiempo de un cuerpo de masa *m* es igual a la fuerza neta externa aplicada al cuerpo". Es decir, la variación del momento y la fuerza neta externa aplicada al cuerpo presentan igual magnitud y dirección.

De lo expresado en la parte de arriba y de acuerdo con [17], la Segunda Ley de Newton se puede expresar por medio de la siguiente ecuación matemática vectorial:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\,\vec{P}}{d\,t} \tag{177}$$

Donde:

- $\vec{F}_{ext}$: representa la fuerza externa aplicada al cuerpo.
- $\frac{d\,\vec{P}}{d\,t}$: representa la razón de cambio del momento lineal con respecto al tiempo.
- $\vec{P} = m\vec{v}$: representa el momento lineal del cuerpo donde m es su masa y $\vec{V}$ su velocidad.

En la Fig. 180 se muestra el momento lineal inicial $\vec{P}_1 = m\vec{V}_1$ de un patinador de masa m, quien tiene una velocidad inicial constante $\vec{V}_1$. Un instante después al patinador se le aplica una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ de tal forma que su momento lineal es alterado, presentando ahora otro momento $\vec{P}_2 = m\vec{V}_2$, es decir, la nueva velocidad de la persona es $\vec{V}_2$. Se puede dar uno cuenta cómo, después de que la fuerza externa actúa sobre la persona y, le cambia así su estado de inercia. Esta persona sigue de nuevo un movimiento rectilíneo uniforme en otra dirección.

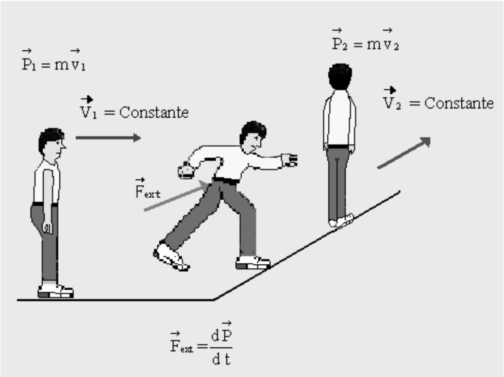


Figura 180. Una persona se mueve inicialmente con movimiento rectilíneo uniforme y presenta un momento lineal $\vec{P}_1 = m\vec{v}_1$. Luego le es aplicada una fuerza externa, la cual le crea un cambio en su velocidad y, por ende, un cambio en su momento lineal, de modo que este es ahora $\vec{P}_2 = m\vec{v}_2$. Después de lo anterior el hombre sigue nuevamente un movimiento rectilíneo uniforme. Fuente: elaboración propia

Ahora, cuando la masa del cuerpo no varía durante el intervalo de tiempo en el que se le aplica la fuerza externa, y se le realiza la derivada con respecto al tiempo del momento lineal en (177), de acuerdo con [13] y [17] esta queda expresada de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Es decir:

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \tag{178}$$

Así, (178) representa la Segunda Ley de Newton cuando la masa del cuerpo al cual se le aplica la fuerza es constante. Siendo $\vec{F}_{ext}$ la fuerza externa que tiene que aplicarsele para causarle una aceleración $\vec{a}$. Por tanto, siempre que la masa del cuerpo no cambie en el tiempo cuando se impriman varias fuerzas externas sobre ella, entonces, de acuerdo con [12], la Segunda Ley de Newton queda expresada de forma general de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = m\vec{a} \tag{179}$$

De esta manera, (179) indica que la fuerza externa neta que actúa sobre un cuerpo de masa *m* es igual a la sumatoria de todas las fuerzas externas $\vec{f}_i$ aplicadas sobre él, generandole estas una aceleración $\vec{a}$. Por lo regular, (179) la encontramos en la literatura expresada de forma escalar, como, por ejemplo, en [14] y [15], de la siguiente manera:

$$F_{ext} = ma \tag{180}$$

Ejemplo 1.

a) Determine la fuerza externa aplicada a un cuerpo de masa m = 40 kg que se desplaza en dirección *x* positiva con una magnitud de aceleración de 6 m/s^2; b) ¿Cuál es la magnitud de esta fuerza?

Solución

a) Al tener presente (178), es decir:

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Del texto del ejercicio se deduce que la masa y la aceleración están dadas por:

$$m = 40\text{kg} \;\; ; \;\; \vec{a} = 6\text{m/s}\,\hat{I}$$

Si se reemplazan el valor de masa y el vector de aceleración en (178) tenemos que:

$$\vec{F}_{ext} = (40\text{kg})\left(6\text{m/s}^2\hat{I}\right)$$

Al realizar la multiplicación indicada en la expresión anterior y tener presente la equivalencia de la unidad de fuerza (newton), se obtiene, finalmente, que la fuerza externa que actúa sobre el cuerpo es de:

$$\vec{F}_{ext} = 240\,\text{New}\,\hat{I}$$

b) Del resultado de la fuerza obtenida en la parte de arriba se deduce la magnitud de la fuerza, es decir:

$$F_{ext} = 240\,\text{New}$$

Ejemplo 2.

a) ¿Qué aceleración presenta un cuerpo de masa m = 60 kg, al cual se le aplicó una magnitud de fuerza de 2000 N en dirección *y* negativa; b) ¿Cuál es la dirección de la aceleración del cuerpo?

Solución

a) Al despejar en (178) el término que representa la aceleración tenemos que:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$$

Del texto del ejercicio se deduce que el valor de masa y el vector de fuerza que actúa sobre el cuerpo están dadas por:

$$m = 60\text{kg} \;\; ; \;\; \vec{F}_{ext} = 2000\text{New}(-\hat{J})$$

Si se reemplazan en la ecuación de arriba el valor de masa y el vector de fuerza tenemos:

$$\vec{a} = \frac{2000\text{New}(-\hat{J})}{60\text{kg}} = 33{,}333\,\frac{\text{New}}{\text{kg}}(-\hat{J})$$

Al reemplazar la equivalencia de la unidad de fuerza (newton) y se simplifican términos semejantes se obtiene la aceleración pedida del cuerpo, es decir:

$$\vec{a} = 33{,}333\text{m/s}^2\,(-\hat{\jmath})$$

b) Según el resultado obtenido, la dirección de la aceleración es la misma que la de la fuerza, es decir, ambas apuntan hacia el eje *y* negativo. Este resultado es correcto ya que la fuerza y la aceleración, como se mencionó anteriormente, deben presentar la misma dirección.

Ejemplo 3.

a) Determine el valor de la masa de un cuerpo al cual se le aplica una magnitud de fuerza de 10 000 N, de modo que le imprime esta última una magnitud de aceleración de 50 m/s².

Solución

a) Al hacer uso de la Segunda Ley de Newton de forma escalar, representada a través de (180), es decir:

$$F_{ext} = \text{m}a$$

Si se despeja en (180) la masa *m* se obtiene que:

$$\text{m} = \frac{F_{ext}}{a}$$

Al reemplazar en la ecuación anterior la magnitud de la fuerza y el valor de masa expresados en el texto del ejercicio tenemos:

$$\text{m} = \frac{10000\text{New}}{50\text{m/s}^2} = \frac{10000\text{kg m/s}^2}{50\text{m/s}^2}$$

Al realizar la división indicada en la parte de arriba y simplificar términos semejantes se obtiene el valor de la masa del cuerpo, es decir:

$$\text{m} = 200\text{kg}$$

a) Diagrama de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo o diagrama de cuerpo libre

Para aplicar la Segunda Ley de Newton en la solución de problemas de cuerpos en los que se requiere conocer la fuerza resultante de todas las fuerzas individuales que actúan sobre él inicialmente, se le debe asociar un diagrama de cuerpo libre. Este último no es más que un esquema en el que se ilustran todas las fuerzas externas ejercidas sobre el cuerpo. Estas fuerzas externas, de acuerdo con [14], resultan del contacto directo del objeto en estudio con otros cuerpos a su alrededor, e igualmente por efecto de fuerzas a distancias como la que ejerce la gravedad. Cabe aclarar que aquí los detalles no son tan relevantes.

En la Fig. 181 se ilustran las fuerzas externas individuales que están actuando sobre la caja que se encuentra sobre una carretilla transportada por una persona. Entre estas fuerzas tenemos:

- $\vec{\mathrm{N}}$: es la fuerza normal que ejerce la base o planchón de la carretilla sobre la caja.
- $\vec{F_r}$: es la fuerza de rozamiento que ejerce la superficie rugosa de la base de la carretilla sobre la caja, la cual no la deja deslizar.
- $\vec{F}$: es la fuerza que ejerce la persona que transporta la carretilla sobre la caja.
- $\vec{W}$: es la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre la caja, también conocida como peso del cuerpo.

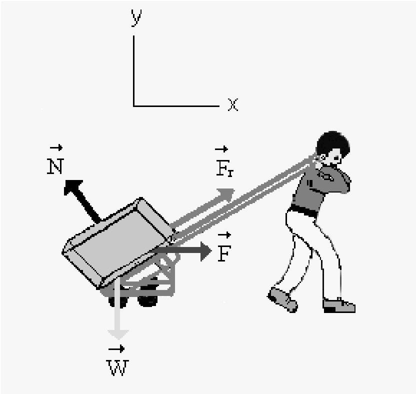


Figura 181. Fuerzas externas actuando sobre una caja que se encuentra sobre una carretilla de superficie rugosa, la cual transporta una persona. Estas fuerzas son la fuerza normal, la fuerza de rozamiento, el peso y la fuerza que ejerce la persona sobre la carreta. Fuente: elaboración propia

Al analizar en detalle las fuerzas que actúan sobre la caja y tener en cuenta el plano cartesiano de movimiento de esta, se obtiene el diagrama de cuerpo libre ilustrado en la Fig. 182.

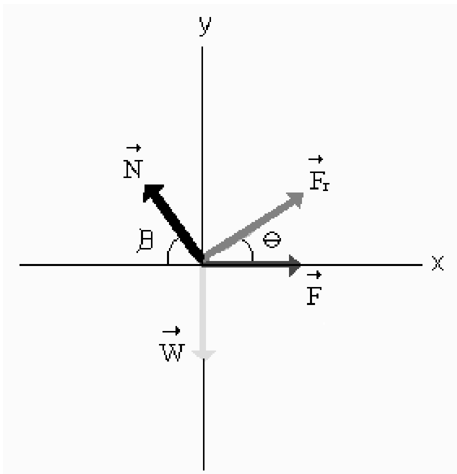


Figura 182. Diagrma de cuerpo libre de las fuerzas externas que actúan sobre la caja ilustrada en la Fig. 181. Los ángulos θ y β son los que forman la fuerza normal y la fuerza de rozamiento con respecto al eje *x* del sistema de coordenadas cartesiano *xy*, respectivamente. Fuente: elaboración propia

Cuando el diagrama está definido se pueden determinar matemáticamente cada una de las fuerzas. Luego estas se suman vectorialmente para obtener la fuerza resultante. Es decir, cuando los diagramas de cuerpo libre de objetos sobre los cuales actúan fuerzas externas se analizan y elaboran de manera correcta, se tiene la herramienta principal para aplicar la Segunda Ley de Newton. Por tanto, la importancia de todo esto radica en reconocer primero cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, o el sistema de observación en estudio.

Ejemplo 4.

Una caja de madera de masa 30 kg se mueve hacia abajo sobre una rampa de aluminio, la cual presenta una inclinación de 20° con respecto a la línea horizontal. Si la superficie de la rampa presenta un coeficiente de rozamiento cinético de 0,02 y la caja se encuentra bajo la influencia de la fuerza de gravedad: a) ¿cuál es la aceleración de la caja? b) ¿cuál es la magnitud de la fuerza normal? Véase la Fig. 183.

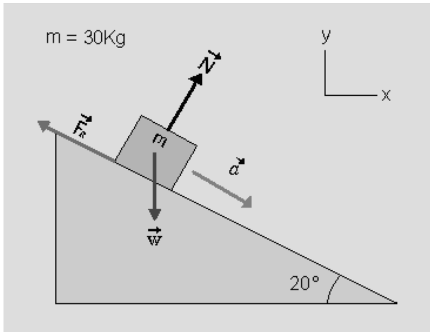


Figura 183. Cuerpo de masa m = 30kg, deslizándose sobre una superficie lisa. Fuente: elaboración propia.

Solución

a) Inicialmente, realizamos el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que están actuando sobre la masa de 30 kg, tal como se muestra en la Fig. 184.

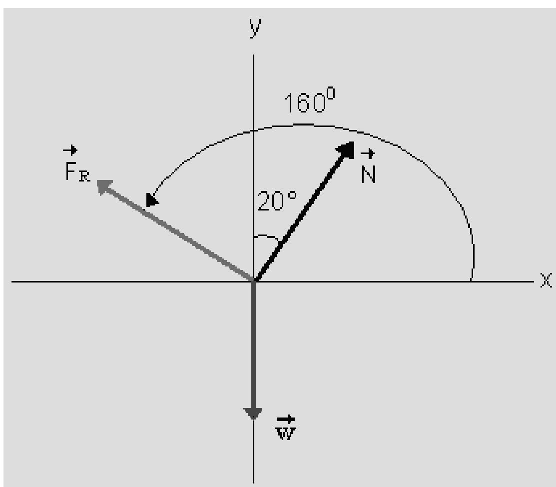


Figura 184. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas actuantes sobre la masa de 30kg que se desliza sobre el plano inclinado. Fuente: elaboración propia

Ahora, al hacer uso de (179), es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f_i} = m\,\vec{a}$$

Si se reemplaza cada una de las fuerzas que estan actúando sobre el cuerpo en la sumatoria que aparece en la ecuación de arriba, tenemos:

$$\vec{F}_R + \vec{w} + \vec{N} = m\vec{a} \qquad (1)$$

Se procede ahora a determinar de manera independiente cada una de las fuerzas involucradas en la expresión de arriba, así como el vector de aceleración del cuerpo.

El vector de fuerza normal se representa de la siguiente manera:

$$\vec{N} = N\left(\cos 70^0\ \hat{I} + \operatorname{sen} 70^0\ \hat{J}\right)$$

Al determinar el valor del coseno y seno del ángulo de 70^0 y reemplazandolos en la parte de arriba se obtiene la expresión general del vector normal, así:

$$\vec{N} = N\left(0{,}342\ \hat{I} + 0{,}939\ \hat{J}\right)$$

Al realizar la multiplicación se tiene que:

$$\vec{N} = 0{,}342N\hat{I} + 0{,}939\ N\hat{J} \qquad (*)$$

Ahora, se procede a hallar el vector de fuerza de rozamiento cinética mediante (176), es decir:

$$\vec{F}_c = \mu_c N \hat{r}_c$$

Con $\hat{r}_c = \cos 160^0\ \hat{I} + \operatorname{sen} 160^0\ \hat{J}$, al sustituir en la expresión de arriba tenemos:

$$\vec{F}_c = \mu_c N(\cos 160^0\ \hat{I} + \operatorname{sen} 160^0\ \hat{J})$$

Si se reemplazan los valores del seno y coseno de 160^0 en la ecuación anterior se obtiene:

$$\vec{F}_c = \mu_c N(-0{,}939\ \hat{I} + 0{,}342\ \hat{J})$$

Al destruir paréntesis tenemos que:

$$\vec{F}_c = -0{,}939\ \mu_c N\hat{I} + 0{,}342\ \mu_c N\ \hat{J} \qquad (**)$$

Ahora se expresa el vector fuerza de gravedad, llamado también "peso del cuerpo", así:

$$\vec{w} = m\vec{g} = mg(-\hat{J}) \qquad (***)$$

De igual manera, expresamos el vector de aceleración del cuerpo. Para esto observamos en la figura que el vector unitario de aceleración es igual al negativo del vector unitario de la fuerza de rozamiento, por tanto, esta queda expresada de la siguiente manera:

$$\vec{a} = -a(-0{,}939\hat{I} + 0{,}342\hat{J})$$

Al pasar a multiplicar el signo negativo de afuera con los signos de cada uno de los términos dentro del paréntesis se obtiene que:

$$\vec{a} = a(0{,}939\hat{I} - 0{,}342\hat{J}) \qquad (****)$$

Ahora, al reemplazar (*), (**),(***) y (****) en (1) se obtiene:

$$(-0{,}939\,\mu_c N\hat{I} + 0{,}342\,\mu_c N\,\hat{J}) + \left[mg(-\hat{J})\right] + (0{,}342N\hat{I} + 0{,}939N\hat{J}) = ma(0{,}939\hat{I} - 0{,}342\hat{J})$$

Si se pasa a multiplicar la masa y la aceleración en el miembro derecho de la igualdad en la ecuación de arriba, se agrupan los términos algebraicos semejantes en la parte izquierda y se saca factor común, se obtiene:

$$(-0{,}939\,\mu_c + 0{,}342)N\hat{I} + \left[(0{,}342\mu_c + 0{,}939)N - mg\right]\hat{J} = 0{,}939ma\hat{I} - 0{,}342ma\hat{J}$$

Al realizar la comparación vectorial indicada en la igualdad anterior obtenemos las siguientes ecuaciones escalares:

$$(-0{,}939\,\mu_c + 0{,}342)N = 0{,}939ma$$

$$(0{,}342\,\mu_c + 0{,}939)N - mg = -0{,}342ma$$

Si se reemplazan los valores de masa, coeficiente de rozamiento y de gravedad en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\left[(-0{,}939)(0{,}02) + 0{,}342\right]N = (0{,}939)(30)a$$

$$\left[(0{,}342)(0{,}02) + 0{,}939\right]N - (30)(9{,}8) = -0{,}342(30)a$$

Si se realizan las multiplicaciones indicadas en las expresiones de arriba se obtienen, finalmente, las ecuaciones (2) y (3):

$$0{,}323N = 28{,}17a \tag{2}$$

$$0{,}945N - 294 = -10{,}26a \tag{3}$$

Al despejar N en la ecuación (2) tenemos que:

$$N = \frac{28{,}17a}{0{,}323} = 87{,}213a$$

Si se sustituye el resultado anterior en la ecuación (3) se obtiene:

$$(0{,}945)(87{,}213a) - 294 = -10{,}26a$$

Al realizar la multiplicación indicada en la parte izquierda de la igualdad anterior, se tiene:

$$82{,}416a - 294 = -10{,}26a$$

Al transponer términos y reducir los semejantes, se obtiene:

$$92{,}676a = 294$$

Finalmente, al despejar la magnitud de aceleración a y realizar la división correspondiente se obtiene su valor, es decir:

$$a = \frac{294}{92{,}676} = 3{,}172\text{m/s}^2$$

Ahora, si se sustituye la magnitud de la aceleración en la ecuación (****) se obtiene el vector de aceleración del cuerpo, así:

$$\vec{a} = 3{,}172\text{m/s}^2(0{,}939\hat{\imath} - 0{,}342\hat{\jmath})$$

Al destruir el paréntesis se tiene:

$$\vec{a} = 2{,}978\text{m/s}^2\,\hat{\imath} + 1{,}084\text{m/s}^2\,(-\hat{\jmath})$$

b) Al reemplazar la magnitud de la aceleración en la ecuación de arriba, que representa la magnitud de la fuerza normal, se obtiene su valor, así:

$$N = 87{,}213(3{,}172) = 276{,}639\text{New}$$

Ejemplo 5.

Una caja de madera de 55 kg de masa la hala una persona sobre una superficie rústica de coeficiente de rozamiento cinético 0,3. Determine la fuerza ejercida por la persona y su magnitud, si ella le imprime a la caja una magnitud de aceleración de 4,5 m/s^2. Véase la Fig. 185.

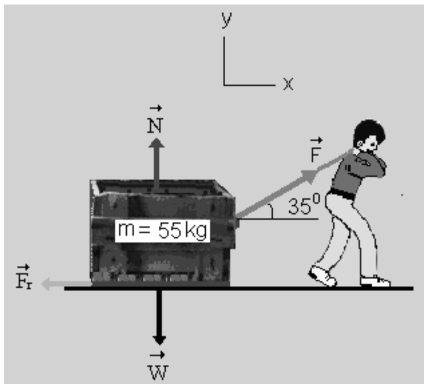


Figura 185. Fuerzas que actúan sobre la caja de 55kg tirada por la persona. Fuente: elaboración propia

Solución

Se realiza, primero, el diagrama de “cuerpo libre” de las fuerzas que actúan sobre la caja. Véase la Fig. 186.

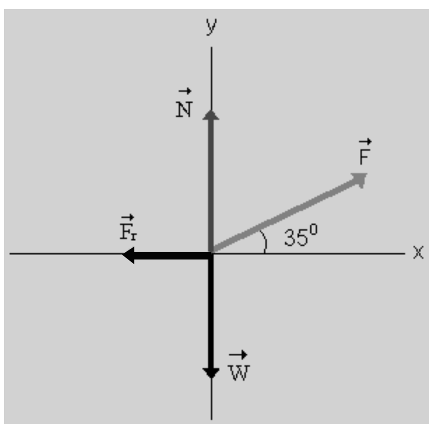


Figura 186. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que están actuando sobre la caja de 55kg. Fuente: elaboración propia

Al hacer uso de (179), se tiene:

$$\vec{F}_r + \vec{w} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a} \qquad (1)$$

Ahora, se determinan cada uno de los vectores fuerzas presentes en la ecuación 1, e igualmente el vector de aceleración de la caja. La dirección de este último está sobre el eje *x* positivo.

El vector fuerza de rozamiento esta dado por:

$$\vec{F}_c = \mu_c N(-\hat{I}) \qquad (*)$$

El vector fuerza de gravedad esta dado por:

$$\vec{w} = mg(-\hat{J}) \qquad (**)$$

El vector fuerza normal esta dado por:

$$\vec{N} = N\hat{J} \qquad (***)$$

El vector fuerza ejercido por la persona está dado por:

$$\vec{F} = F(\cos 35^0\,\hat{I} + \operatorname{sen} 35^0\,\hat{J}) = 0{,}819F\hat{I} + 0{,}573F\hat{J} \qquad (****)$$

El vector de aceleración del cuerpo está dado por:

$$\vec{a} = a\hat{I} \qquad (*****)$$

Al sustituir las ecuaciones (*****), (****),(***),(**) y (*) en la ecuación (1) tenemos:

$$\mu_c N(-\hat{I}) + mg(-\hat{J}) + N\hat{J} + (0{,}819F\hat{I} + 0{,}573F\hat{J}) = ma\hat{I}$$

Al agrupar de forma algebraica vectorial los términos semejantes en la parte derecha de la igualdad en la ecuación anterior, y sacar factor común, se tiene:

$$(-\mu_c N + 0{,}819F)\hat{I} + (-mg + N + 0{,}573F)\hat{J} = ma\hat{I}$$

Si se realiza la comparación vectorial en la expresión anterior, se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$-\mu_c N + 0{,}819F = ma \tag{2}$$

$$-mg + N + 0{,}573F = 0 \tag{3}$$

Al reemplazar los valores de coeficiente de rozamiento, masa, magnitud de aceleración y gravedad en las ecuaciones anteriores, y realizar las operaciones correspondientes y transponer términos, se obtienen las ecuaciones (2) y (3), así:

$$-0{,}3N + 0{,}819F = 247{,}5 \tag{2}$$

$$N + 0{,}573F = 522{,}5 \tag{3}$$

Si se multiplica la ecuación (3) por 0,3, y se suma término a término con la ecuación (2), tenemos:

$$\begin{array}{r} -0{,}3N + 0{,}819F = 247{,}5 \\ 0{,}3N + 0{,}17NF = 156{,}75 \\ \hline 0{,}99F = 404{,}25 \end{array}$$

Al despejar la magnitud de fuerza *F* en el resultado anterior, se determina su valor, así:

$$F = \frac{404{,}25}{0{,}99} = 408{,}333\text{New}$$

Al reemplazar la magnitud de la fuerza *F* en la ecuación (****) obtenemos la fuerza aplicada por la persona, así:

$$\vec{F} = (0{,}819)(408{,}333\text{New})\,\hat{I} + (0{,}573)(408{,}333\text{New})\,\hat{J}$$

Es decir, la fuerza esta dada por:

$$\vec{F} = 334{,}424\text{New}\,\hat{I} + 233{,}974\text{New}\,\hat{J}$$

3) Tercera Ley de Newton: ley de acción y reacción

Según lo expresado en [1] y [5], se puede decir que la Tercera Ley de Newton se reduce a lo siguiente: "A toda acción le corresponde una reacción igual y de sentido contrario, es decir, las acciones mutuas (fuerzas) entre dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentidos opuestos".

Ahora, de acuerdo con los ejemplos que se proporcionan en [15] y lo citado en [5], referentes a la Tercera Ley de Newton, se puede concluir que en esta ley Newton sugiere que si un cuerpo 1 le aplica a un cuerpo 2 una fuerza $\vec{f}_1$, el segundo cuerpo le aplicará una fuerza $\vec{f}_2$ al primero de igual magnitud pero de sentido contrario, es decir:

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \tag{181}$$

Con $f_1 = f_2 = f$, donde f es la magnitud de las fuerzas.

El signo negativo indica que el sentido de las fuerzas de acción y reacción son contrarias, tal como se muestra en la Fig. 187.

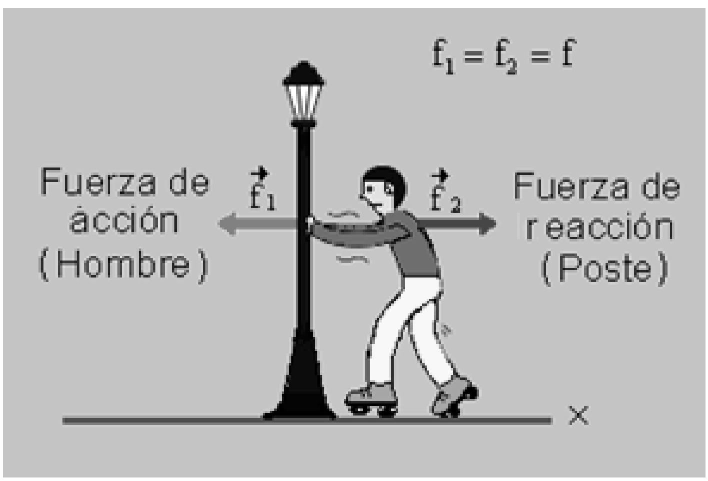


Figura 187. La persona ejerce una fuerza de acción $\vec{f}_1$ sobre un farol, y este le ejerce a esta una fuerza $\vec{f}_2$ de reacción de igual magnitud pero de sentido contrario. Fuente: elaboración propia

La fuerza de reacción del farol hace que la persona salga disparada hacia atrás debido a que los patines sobre los cuales se encuentra presentan poco rozamiento con el piso, tal como se muestra en la Fig. 188.

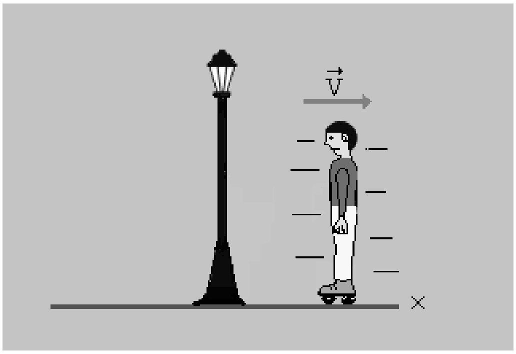


Figura 188. Debido a la fuerza de reacción del farol la persona sale disparada hacia atrás con velocidad constante $\vec{v}$, al suponer que no existe fuerza de rozamiento entre el piso y los patines.
Fuente: elaboración propia.

Así, por ejemplo, si las fuerzas de acción y reacción estuvieran aplicadas en la dirección del eje *x* —como se muestra en la Fig. 187—, (181) queda definida de la siguiente manera:

$$f_1 \hat{I} = -f_2(-\hat{I}) \text{ con } f_1 = f_2$$

Ejemplo 6.

Un auto al chocar con una pared le ejerce una magnitud de fuerza de 1000 N. Si el auto se movía en dirección *x* positiva, ¿cuál es la fuerza aplicada por la pared sobre el auto?

Solución

Del texto del ejercicio se deduce que la fuerza que le ejerce el auto a la pared está dada por:

$$\vec{F}_A = 1000\text{New}\,\hat{I}$$

Al tener en cuenta (181) se deduce que la fuerza aplicada por la pared al auto está dada por:

$$\vec{F}_P = 1000\text{New}(-\hat{I})$$

Del resultado de arriba se concluye que las magnitudes de las fuerzas del auto y la pared son iguales, pero de direcciones diferentes. Esto significa que las fuerzas son distintas, como se enunció.

Ejemplo 7.

Determine en la Fig. 189 la fuerza $\vec{T}$ ejercida sobre la cuerda debido a la fuerza $\vec{F}$, las cuales se encuentran en equilibrio.

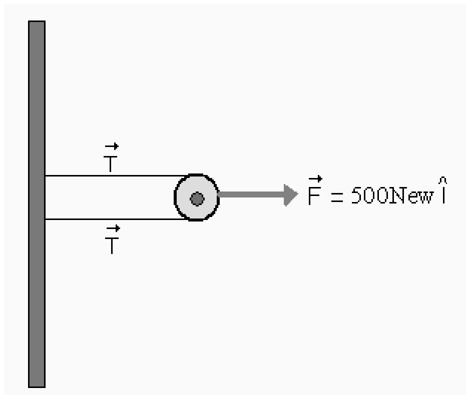


Figura 189 Fuerzas actuantes sobre una cuerda en particular. Fuente: elaboración propia

Solución

De (181), la cual define la ley de acción y reacción, se tiene:

$$\vec{T}+\vec{T}=-\vec{F}=-500\text{New}\,\hat{\imath}$$

Al realizar la suma de vectores identicos en la parte izquierda de la igualdad anterior se obtiene:

$$2\vec{T}=-500\text{New}\,\hat{\imath}$$

Si se divide por 2 la ecuación anterior, se obtiene el vector $\vec{T}$, es decir:

$$\vec{T}=250\text{New}(-\hat{\imath})$$

El resultado anterior nos muestra que el vector de fuerza $\vec{T}$ de la cuerda apunta en sentido contrario a la fuerza $\vec{F}$ aplicada a la polea, lo cual es correcto.

D. Fuerzas aplicadas en el movimiento circular

Como se planteó en el capítulo anterior, todo cuerpo que muestre un movimiento circular debe tener ciertos tipos de aceleraciones. Estas últimas dependen de la clase de movimiento presentado. Si el movimiento realizado es circular uniforme, se puede afirmar que el móvil presenta unicamente aceleración centrípeta o radial [16]. Si el movimiento es circular uniformemente acelerado, además de la aceleración centrípeta presentará una aceleración tangencial. La presencia de estas aceleraciones en el objeto que describe un movimiento circular nos indican que sobre él actúan unas fuerzas cuyos nombres dependen de la aceleración aplicada. Estas fuerzas, según la aceleración o las aceleraciones presentes en el cuerpo, se denominan “fuerza radial” y “fuerza tangencial”.

1) Concepto de fuerza centrípeta o radial

Según la Primera Ley de Newton, denominada “ley de inercia”, lo más natural es que todo cuerpo libre (sin fuerza neta actúando sobre él), y en movimiento, debe describir una trayectoria en línea recta y moverse a velocidad constante, es decir, que su rapidez y dirección no cambian en el tiempo. Ahora, si el cuerpo presenta un movimiento de tipo circular uniforme, éste, en su trayectoria, estaría variando su dirección en cada momento, de modo que genera esto último una aceleración a causa de un cambio en su velocidad. Esta aceleración, según [17], se debe a una fuerza que siempre está dirijida hacia el punto central de su recorrido, la cual es conocida como “fuerza centrípeta” o “fuerza radial”. De acuerdo con [16], este tipo de fuerzas son las responsables de que los cuerpos en movimiento describan trayectorias de tipos circulares (véase la Fig. 190).

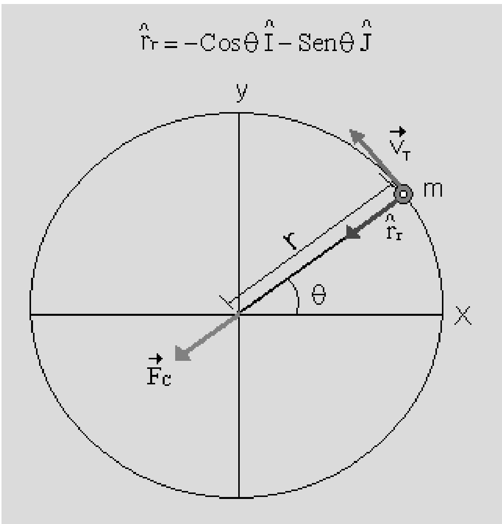


Figura 190. Dirección del vector unitario radial hacia el centro de la trayectoria. Este apunta en la misma dirección en la que se dirige la fuerza centrípeta y la aceleración centrípeta.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [17], la ecuación matemática vectorial que permite determinar la fuerza centrípeta o radial de un cuerpo de masa *m* que describe un movimiento de tipo circular uniforme está dada por la expresión:

$$\vec{F}_C = m\vec{a}_c = m(\vec{w} \times \vec{v}_T) \tag{182}$$

Recuerde que (140) de la unidad 3, citada en [17], expresa que:

$$\vec{a}_c = \vec{w} \times \vec{v}_T$$

Otra forma de determinar la fuerza centrípeta o radial que actúa sobre un cuerpo en rotación es por medio de (139) de la unidad 3, de manera que queda (182) de la siguiente manera:

$$\vec{F}_C = m\frac{v_T^2}{r}(-\mathrm{Cos}\theta\,\hat{I} - \mathrm{Sen}\theta\,\hat{J}) \tag{183}$$

Donde:

- $\vec{F}_C$: representa la fuerza centrípeta del cuerpo de masa *m*.
- m: es la masa del cuerpo que presenta el movimiento circular.
- V_T: es la magnitud de la velocidad tangencial del cuerpo.
- r : es la magnitud del vector de posición radial del cuerpo.
- $\frac{v_T^2}{r}$: es la magnitud de la aceleración centrípeta del cuerpo descrita por (139) de la unidad 3.
- $\hat{r}_r = -\mathrm{Cos}\theta\,\hat{I} - \mathrm{Sen}\theta\,\hat{J}$: es el vector unitario radial que apunta hacia el centro de la trayectoria circular.

En la Fig. 190 se muestra la dirección del vector unitario radial $\hat{r}_r$.

Ejemplo 8.

Determine la fuerza centrípeta ejercida sobre un cuerpo de masa 0,2 kg que describe un movimiento circular uniforme, si el radio de la trayectoria circular es de 2,5 m y a los diez segundos de su movimiento alcanza a realizar cincuenta vueltas (véase la Fig. 191).

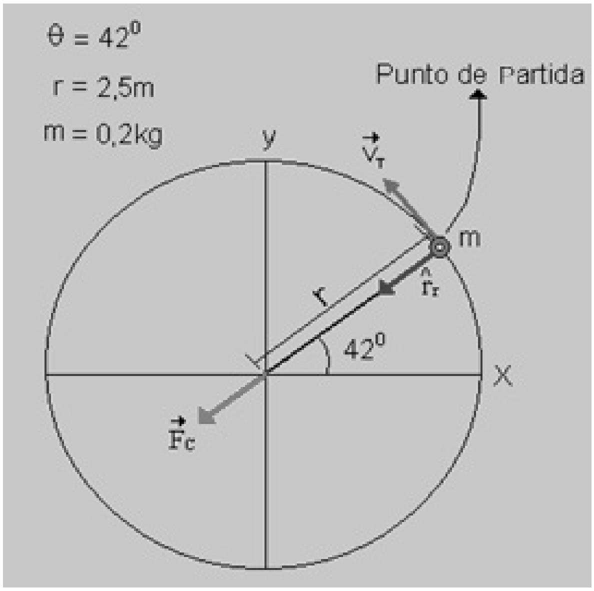


Figura 191. Fuerza centrípeta ejercida sobre un cuerpo que describe un movimiento circular. Fuente: elaboración propia

Solución

Se halla inicialmente la rapidez tangencial del cuerpo mediante (136) de la unidad 3, es decir:

$$v_T = \frac{2\pi r}{T}$$

Donde:

$$T = \frac{10seg}{50} = 0{,}2seg \; ; \; r = 2{,}5m$$

Al reemplazar los valores anteriores en (136) de la unidad 3 se tiene:

$$v_T = \frac{2(3{,}1416)(2{,}5m)}{0{,}2s} = 78{,}54m/s$$

Ahora, es posible determinar la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo por medio de (183), es decir:

$$\vec{F}_C = m\frac{v_T^2}{r}(-Cos\theta\hat{I} - Sen\theta\hat{J})$$

Donde:

$$m = 0{,}2\,kg \; ; \; v_T = 78{,}54 m/s \; ; \; r = 2{,}5m \text{ y } \theta = 42^0$$

Al reemplazar los valores anteriores de masa, rapidez, radio y ángulo en (183), se tiene:

$$\vec{F}_C = (0{,}2kg)\,\frac{(78{,}54m/s)^2}{2{,}5m}\,(-Cos42^0\,\hat{I} - Sen42^0\,\hat{J})$$

Si se realizan las operaciones de multiplicación y división indicadas en la expresión de arriba, y además se determina los valores del seno y del coseno de 42^0, se obtiene:

$$\vec{F}_C = 493{,}482kgm/s^2(-0{,}743\hat{I} - 0{,}669\hat{J})$$

Al pasar a multiplicar el valor fuera del paréntesis por cada una de las componentes vectoriales dentro de este, tenemos:

$$\vec{F}_C = -366{,}657New\,\hat{I} - 330{,}139New\,\hat{J}$$

Recuerde que kgm/s^2 = New.

La expresión de arriba, la cual representa la fuerza centrípeta que está actuando sobre el cuerpo en rotación, se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\vec{F}_C = 366{,}657New(-\hat{I}) + 330{,}139New(-\hat{J})$$

La ecuación anterior indica que el cuerpo presenta unas componentes de aceleración que apuntan en la dirección negativa de los ejes *x* y *y*.

El ejercicio anterior se puede resolver también al hacer uso de (182), es decir:

$$\vec{F}_C = m(\vec{w} \times \vec{v}_T)$$

Donde la magnitud de la velocidad angular $\vec{w}$ se determina utilizando (146) de la unidad 3, ya que esta es una constante de movimiento. Por tanto, la velocidad angular del cuerpo se determina por medio de la expresión vectorial:

$$\vec{w} = \frac{\theta_T}{t_T}\,\hat{k}$$

Donde $\theta_T = 100\pi \text{rad}$ y $t_T = 10\text{s}$, por tanto, se tiene que:

$$\vec{w} = \frac{100\pi \text{rad}}{10\text{s}}\hat{k} = 31{,}415 \text{rad/s}\hat{k}$$

Ahora, como se sabe, la velocidad tangencial está dada por:

$$\vec{v}_T = 78{,}54\text{m/s} \,(\cos 132^0 \hat{I} + \text{sen} 132^0 \hat{J})$$

Al hallar los valores del coseno y seno de 132^0 y pasar a multiplicar la magnitud de la velocidad tangencial en la expresión anterior, se tiene que:

$$\vec{v}_T = -52{,}553\text{m/s}\,\hat{I} + 58{,}366\text{m/s}\,\hat{J}$$

Si se reemplaza el valor de la masa y las velocidades tangencial y angular en (182), se obtiene:

$$\vec{F}_C = 0{,}2\text{kg}\left[(31{,}415\text{rad/s}\hat{k})X(-52{,}553\text{m/s}\,\hat{I} + 58{,}366\text{m/s}\,\hat{J})\right]$$

Al realizar el producto cruz entre vectores indicado en el corchete de la expresión anterior se llega a:

$$\vec{F}_C = 0{,}2\text{kg}\left[-1650{,}952\text{m/s}^2\,\hat{J} - 1833{,}567\text{m/s}^2\,\hat{I})\right]$$

Si se pasa a multiplicar el término que se encuentra fuera del corchete en la expresión de arriba, finalmente se obtiene la fuerza centrípeta, así:

$$\vec{F}_C = -366{,}713\text{New}\,\hat{I} - 330{,}190\text{New}\,\hat{J}$$

Si se observa detenidamente en la ecuación anterior, la parte entera de las componentes vectoriales de este resultado de fuerza centrípeta concuerda con la parte entera de las componentes vectoriales de la fuerza centrípeta hallada. Observamos que las que no concuerdan son sus partes decimales. Esto último se debe, más que todo, a la omisión de decimales durante el proceso de operación matemática. Aquí lo importante es que se obtenga el mismo número entero en las respectivas componentes, y que la parte decimal no presente tanta desviación, lo cual se cumple en los resultados anteriores obtenidos por ambos métodos.

Ejemplo 9.

La magnitud del desplazamiento angular de un cuerpo de masa 0,04 kg es de 300^0 a los seis segundos de su movimiento. Si el radio de la trayectoria circular del cuerpo que describe un movimiento circular uniforme es de 50 cm, a) ¿cuál es el periodo de movimiento?, b) ¿cuál es su velocidad tangencial?, c) ¿cuál es su velocidad angular?, d) ¿cuál es la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo? Véase la Fig. 192.

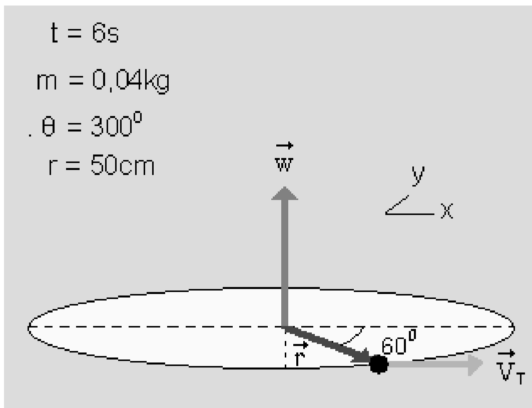


Figura 192. Descripción del desplazamiento angular de un cuerpo con movimiento circular uniforme. Fuente: elaboración propia

Solución

a) El periodo de movimiento del cuerpo se determina a través de (133) de la unidad 3, es decir:

$$T = \frac{t}{n}$$

Donde:

$$n = \frac{5}{6} \text{ vuelta y } t = 6s$$

Al reemplazar los valores de tiempo y número de vuelta en (133) de la unidad 3. se tiene que:

$$T = \frac{6}{\frac{5}{6}}\ s = 7{,}2s$$

b) La velocidad angular se determina mediante (137) de la unidad 3, es decir:

$$\vec{v}_T = \frac{2\pi r}{T}(-\mathrm{Sen}\theta\,\hat{\mathrm{I}} + \mathrm{Cos}\theta\,\hat{\mathrm{J}})$$

Donde:

$$r = 50cm = 0,5m \;;\; \theta = 300^0 \text{ y } T = 7,2s$$

Al reemplazar los valores de las variables de arriba en la ecuación que nos permite determinar la velocidad tangencial se tiene que:

$$\vec{v}_T = \frac{2(3,1416)(0,5m)}{7,2s}(-\mathrm{Sen}300^0\,\hat{\mathrm{I}} + \mathrm{Cos}300^0\,\hat{\mathrm{J}})$$

Si se realizan las operaciones correspondientes en la expresión anterior se tiene:

$$\vec{v}_T = 0,436m/s(0,866\,\hat{\mathrm{I}} + 0,5\,\hat{\mathrm{J}})$$

Al pasar a multiplicar el valor de la parte de afuera del paréntesis por cada una de las componentes vectoriales dentro de este, se obtiene la velocidad tangencial pedida, así:

$$\vec{v}_T = 0,377m/s\,\hat{\mathrm{I}} + 0,218m/s\,\hat{\mathrm{J}}$$

c) Para determinar la velocidad angular del cuerpo se hace uso de la ecuación:

$$\vec{w} = \frac{\theta}{t}\,\hat{k}$$

Con:

$$\theta = 300^0 = \frac{5}{3}\pi rad \text{ y } t = 6s$$

Al reemplazar los valores anteriores de las variables en la ecuación que permite determinar la velocidad angular, tenemos que:

$$\vec{w} = \frac{\frac{5}{3}\pi rad}{6s} = 0,87 rad/s\hat{k}$$

d) Para determinar la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo se hace uso de (183), es decir:

$$\vec{F}_C = m(\vec{w} \, x \, \vec{v}_T)$$

Si se reemplazan en la expresión anterior el valor de la masa y los vectores de velocidad tangencial, así como la velocidad angular del cuerpo, se tiene que:

$$\vec{F}_C = 0{,}04kg\left[(0{,}87rad/s\hat{k})\ X(0{,}377m/s\ \hat{I} + 0{,}218m/s\ \hat{J})\right]$$

Al realizar el producto cruz entre los vectores indicados dentro del corchete se obtiene:

$$\vec{F}_C = 0{,}04kg\left[-0{,}19m/s^2\ \hat{I} + 0{,}33m/s^2\ \hat{J}\right]$$

Al pasar a multiplicar el valor de afuera del corchete por cada uno de las componentes vectoriales dentro de este se obtiene finalmente la fuerza centrípeta ejercida sobre el cuerpo en rotación, así:

$$\vec{F}_C = -0{,}0076new\,\hat{I} + 0{,}0132new\,\hat{J}$$

2) Concepto de fuerza tangencial

Cuando la rapidez del cuerpo que describe el movimiento circular no es constante, este, además de presentar una aceleración centrípeta o radial debido al cambio en su dirección, muestra también otra aceleración conocida como "aceleración tangencial", es decir, esta última aceleración se presenta en el móvil debido a la variación en su rapidez. La aparición de esta nueva aceleración sugiere que sobre el cuerpo debe actuar una fuerza que le genera el cambio en la magnitud de su velocidad, la cual se conoce como "fuerza tangencial"; a ésta, según [16], por permanecer siempre tangente a la trayectoria circular se le denomina de esta manera. Se puede concluir, entonces, que esta última fuerza siempre actuará sobre el cuerpo que describe el movimiento circular cada vez que su rapidez varíe en el tiempo. La ecuación matemática vectorial que permite determinar la fuerza tangencial del cuerpo que varía la magnitud de su rapidez tangencial en el tiempo está dada por:

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_T = m(\vec{\alpha}\ x\ \vec{r}) \qquad (184)$$

Recuerde que (163) de la unidad 3 expresa cómo la aceleración tangencial del cuerpo que describe un movimiento circular uniformemente acelerado está dada por $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$. La magnitud de esta aceleración es constante, por tanto, la magnitud de la fuerza tangencial también lo es.

Donde:

- $\vec{F}_T$: representa la fuerza tangencial que actúa sobre el cuerpo de masa *m*.
- m: es la masa del cuerpo que presenta el movimiento circular uniformemente acelerado.
- $\vec{r}$: es el vector de posición radial del cuerpo.
- $\vec{\alpha}$: es el vector de aceleración angular del cuerpo.
- $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$: es la aceleración tangencial del cuerpo descrita por (163) de la unidad 3.

En la Fig.193 se muestra la dirección que presenta la fuerza tangencial aplicada al cuerpo de masa *m* en su punto de ubicación. Además, se observan sus vectores de posición radial y de aceleración ángular, ya que este describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

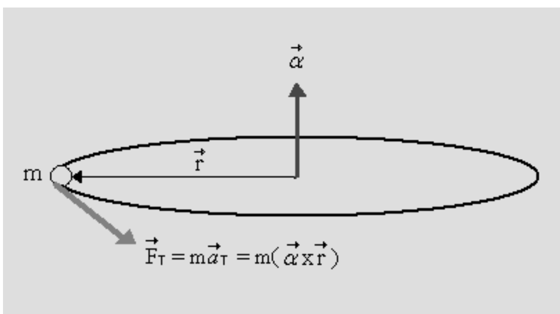


Figura 193. Fuerza tangencial de un cuerpo de masa *m* en su punto de ubicación, el cual presenta un movimiento circular uniformemente acelerado. Esta fuerza es dirigida en la misma dirección de la aceleración tangencial. Fuente: elaboración propia

Ejemplo 10.

La magnitud de la velocidad angular de un cuerpo que describe un movimiento circular uniformemente acelerado aumenta de 30 rad/s a 40 rad/s en un tiempo de 4 s. Si la masa del cuerpo es de 0,03 kg y el valor de su radio de giro es de

0,1 m, calcule: a) la aceleración angular del cuerpo, b) la magnitud del desplazamiento angular del cuerpo en t = 4 s, y c) la fuerza tangencial ejercida sobre éste.

Solución

a) Para determinar la aceleración angular del cuerpo se hace uso de la (165) de la unidad 3, es decir:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$$

Al despejar de la ecuación anterior el término que representa la aceleración angular del cuerpo tenemos:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_0}{t}$$

Donde:

$$\vec{\omega}_0 = 30\text{rad/s}\,\hat{k} \;;\; \vec{\omega}_f = 40\text{rad/s}\,\hat{k} \;;\; t = 4\,\text{s}$$

Si se reemplaza el valor de tiempo y las velocidades angulares inicial y final en la expresión anterior que representa la aceleración angular del cuerpo, se obtiene que:

$$\vec{\alpha} = \frac{40\text{rad/s}\,\hat{k} - 30\text{rad/s}\,\hat{k}}{4\text{s}} = 2{,}5\text{rad/s}^2\,\hat{k} \tag{1}$$

b) Para determinar la magnitud del desplazamiento angular del cuerpo se utiliza (171) de la unidad 3, en la que se supone que el cuerpo empieza a girar desde el origen del sistema de coordenadas, es decir:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Donde:

$$\omega_0 = 30\text{rad/s} \;;\; \alpha = 2{,}5\text{rad/s}^2 \text{ y } t = 4\,\text{s}$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación que permite determinar la magnitud del desplazamiento angular, se tiene:

$$\theta = (30\text{rad/s})(4\text{s}) + \frac{1}{2}\,(2{,}5\text{rad/s}^2)(4\text{s})^2$$

Al realizar operaciones indicadas en la parte de arriba, se obtiene, finalmente, el valor del ángulo barrido por el cuerpo a los cuatro segundos de su movimiento, así:

$$\theta = 140\text{rad}$$

c) Para determinar la fuerza tangencial del cuerpo se calcula su aceleración centrípeta mediante (163) de la unidad 3, es decir:

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \text{ x } \vec{r}$$

Sin embargo, primero se calcula el vector de posición radial del cuerpo por medio de la siguiente expresión:

$$\vec{r} = r(\cos\theta\,\hat{I} + \text{sen}\theta\,\hat{J})$$

Donde:

$$r = 0{,}1\text{m} \text{ y } \theta = 140\text{rad}$$

Al reemplazar los valores anteriores, en la expresión anterior que permite determinar el vector radial, tenemos que:

$$\vec{r} = (0{,}1\text{m})(\cos 140\text{rad}\,\hat{I} + \text{sen}140\text{rad}\,\hat{J})$$

Si se determina el valor del coseno y seno del ángulo de 140 radianes y se pasa a multiplicar dentro del paréntesis el valor de longitud que se encuentra fuera de este, se obtiene el vector radial pedido, así:

$$\vec{r} = -0{,}0197\text{m}\,\hat{I} + 0{,}0980\text{m}\,\hat{J} \quad (2)$$

Al reemplazar la aceleración angular y el vector radial expresados en (1) y (2) en (163) de la unidad 3, tenemos que:

$$\vec{a}_T = (2{,}5\text{rad/s}^2\,\hat{k})\text{X}(-0{,}0197\text{m}\,\hat{I} + 0{,}0980\text{m}\,\hat{J})$$

Al realizar el producto cruz indicado en la expresión de arriba y tener presente guardar el orden de la operación, se obtiene el vector de aceleración tangencial pedido, así:

$$\vec{a}_T = -0{,}245\text{m/s}^2\,\hat{I} - 0{,}04925\text{m/s}^2\,\hat{J}$$

Finalmente, la fuerza tangencial se determina mediante (184) es decir:

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_T = m(\vec{\alpha} \text{ x } \vec{r})$$

Al sustituir el valor de la masa y el vector de aceleración tangencial en la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_T = 0{,}03\text{kg}(-\,0{,}245\text{m/s}^2\ \hat{I} - 0{,}04925\text{m/s}^2\ \hat{J})$$

Al pasar a multiplicar el valor de la masa fuera del paréntesis por cada una de las componentes vectoriales que se encuentran dentro de este se obtiene, finalmente, la fuerza tangencial que actúa sobre el cuerpo en rotación, así:

$$\vec{F}_T = -0{,}00735\text{New}\ \hat{I} - 0{,}00147\text{New}\ \hat{J}$$

La fuerza tangencial anterior se puede escribir también de la siguiente forma:

$$\vec{F}_T = 0{,}00735\text{New}(-\,\hat{I}) + 0{,}00147\text{New}(-\,\hat{J})$$

Ejemplo 11.

Una pelota de 50 gr de masa se encuentra sobre la superficie de una ruleta rusa a una distancia fija respecto al eje central de rotación de 20 cm. Si la ruleta empieza a girar desde el reposo, y a los 2 s de su movimiento presenta una magnitud de velocidad angular de 4 rad/s, determine: a) la aceleración angular que se le imprime a la pelota por medio de la ruleta; b) el valor del ángulo barrido por la pelota en t = 2 s; c) la fuerza tangencial que actúa sobre la pelota a los 2 s de movimiento; d) la magnitud de la fuerza tangencial.

Solución

a) Para determinar el ángulo barrido por la pelota en (165) de la unidad 3 se despeja la variable de aceleración angular, de modo que queda la expresión:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_0}{t}$$

Donde:

$$\vec{\omega}_f = 4\text{rad/s}\ \hat{k}\ \ ;\ \vec{\omega}_0 = 0\ ;\ t = 2\text{s}$$

Al reemplazar el valor de tiempo y las velocidades angulares inicial y final en la expresión de arriba, la cual permite determinar la aceleración angular, tenemos que:

$$\vec{\alpha} = \frac{(4\text{rad/s} - 0\text{rad/s})\ \hat{k}}{2\,\text{s}}$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\vec{\alpha} = 2\text{rad/s}^2\ \hat{k}$$

b) Para determinar el valor del ángulo barrido por la pelota a los 2 s de su movimiento se utiliza (171) de la unidad 3, es decir:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Al utilizar esta ecuación se considera que la pelota se encuentra inicialmente en el origen del sistema de coordenadas. Ahora, al reemplazar el valor de tiempo y las magnitudes de velocidad angular inicial y de aceleración angular en la ecuación anterior, se tiene:

$$\theta = (0)(2\text{s}) + \frac{1}{2}(2\text{rad/s}^2)(2\text{s})^2$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la expresión de arriba se obtiene el valor del ángulo barrrido:

$$\theta = 4\text{rad}$$

c) Para determinar la fuerza tangencial que actúa sobre la pelota a los dos segundos de su movimiento, primero se halla el vector de posición radial de esta en este tiempo. Para esto se utiliza la expresión vectorial:

$$\vec{r} = r(\cos\theta\ \hat{I} + \text{sen}\theta\ \hat{J})$$

Donde:

$$r = 0{,}2\text{m y } \theta = 4\text{rad}$$

Al reemplazar los valores anteriores de distancia radial y de desplazamiento angular en la expresión anterior, se tiene:

$$\vec{r} = (0{,}2\text{m})(\cos 4\text{rad}\ \hat{I} + \text{sen} 4\text{rad}\ \hat{J})$$

Si se determinan los valores de coseno y seno del ángulo de 4 radianes y se reemplazan dentro del paréntesis, se obtiene:

$$\vec{r}=(0{,}2\text{m})(-\,0{,}653\,\hat{I}-0{,}756\,\hat{J})$$

Al pasar a multiplicar el valor de la distancia radial por cada una de las componentes vectoriales dentro del paréntesis se obtiene que:

$$\vec{r}=0{,}130(-\,\hat{I})+0{,}151\text{m}(-\,\hat{J})$$

Ahora se determina la aceleración tangencial de la pelota mediante la ecuación $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$, para lo cual se reemplazan los vectores de aceleración angular y de posición radial determinados en la parte de arriba en ella, de modo que se obtiene:

$$\vec{a}_T = (2\text{rad/s}^2\,\hat{k})\ X\left[0{,}130\text{m}(-\,\hat{I})+0{,}151\text{m}(-\,\hat{J})\right]$$

Si se realiza el producto cruz indicado en la expresión anterior al tener presente el orden de la operación, se obtiene la aceleración tangencial del cuerpo en t = 2 s, así:

$$\vec{a}_T = 0{,}302\text{m/s}^2\,\hat{I}+0{,}260\text{m/s}^2\,(-\,\hat{J})$$

Finalmente, para hallar la fuerza tangencial que actúa sobre la pelota a los 2 s de su movimiento se utiliza (184), es decir:

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_T$$

Donde:

$$m = 0{,}05\ \text{kg}$$

Al reemplazar el valor de la masa y el vector de aceleración tangencial de la pelota, determinados en la parte de arriba en la ecuación anterior, tenemos que:

$$\vec{F}_T = (0{,}05\text{kg})\left[0{,}302\text{m/s}^2\,\hat{I}+0{,}260\text{m/s}^2\,(-\,\hat{J})\right]$$

Si se multiplica el valor de la masa por cada una de las componentes vectoriales indicadas dentro del corchete en la parte de arriba, se obtiene, finalmente, la fuerza tangencial que actúa en la pelota, es decir:

$$\vec{F}_T = 0{,}0151\text{New}\,\hat{I} + 0{,}013\text{New}(-\hat{J})$$

d) La magnitud de la fuerza tangencial se determina por medio de a siguiente expresión:

$$F_T = \sqrt{(0{,}0151\text{New})^2 + (0{,}013\text{New})^2}$$

Al desarrollar dentro del radical las operaciones indicadas, y así mismo, sacar raíz cuadrada al resultado, se obtiene el valor de la fuerza tangencial, es decir:

$$F_T = 1{,}992x10^{-2}\text{New} \approx 2x10^{-2}\text{New}$$

E. Pasos estratégicos para la solución de situaciones problémicas en física mecánica, en la que se requiere aplicar las leyes de Newton

En [1], [2], [3], [12], [13] y [18] se les proporciona a los estudiantes algunas recomendaciones, como, por ejemplo, el tener en cuenta la aplicación de algunos pasos estratégicos y primordiales. En la mayoría de los casos, con el propósito de dar respuesta a los diferentes interrogantes que plantean la diversidad de situaciones problémicas (ejercicios) que se presentan en física mecánica, en las que se requiere hacer uso de las leyes de Newton. Estas son algunas de estas recomendaciones y pasos a seguir:

- Realizar una lectura rigurosa del enunciado del problema planteado, con el fin de entenderlo, además de identificar el cuerpo o sistema de objetos que hacen parte del sistema en estudio.
- Si el cuerpo o sistema de objetos en estudio no presentan un dibujo esquemático, realícelo usted de manera clara, sin equivocarse.
- Una vez se tiene el dibujo esquemático del cuerpo o del sistema de objetos, trate cada uno de manera independiente, es decir, trace un diagrama de cuerpo libre (fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo) para cada uno de ellos.
- Cada uno de los diagramas de cuerpo libre llévelos individualmente al sistema de coordenadas definido por usted y correspondiente al problema

planteado. Tenga cuidado de asignar a cada vector de fuerza el ángulo real que le corresponde en el sistema.

- A cada uno de los sistemas de coordenadas pertenecientes a los cuerpos individuales aplíquele la Segunda Ley de Newton, con el fin de obtener con la igualdad vectorial resultante una ecuación escalar y determinar así un sistema de ecuaciones escalares solucionable.
- Al resolver el sistema de ecuaciones escalares obtenida en el paso anterior se encuentran los valores para cada una de las variables pedidas en el problema. Es importante recordar que para resolver un sistema de ecuaciones el número de variables o incógnitas debe coincidir con el número de ecuaciones.
- Por último, recuerde que el hallar la solución correcta del ejercicio no significa que con esto termina el problema. Sería bueno hacerse muchas preguntas en torno a esta solución, como, por ejemplo, si se es capaz de interpretar físicamente los resultados matemáticos obtenidos, si las mismas unidades de medidas obtenidas son las que corresponden con el observable físico determinado, o si existen o no magnitudes variables dentro del fenómeno físico estudiado, así como si solo puede solucionar problemas del tipo tratado en el ejercicio particular o no.

Más adelante se tratarán algunos ejemplos en los que se aplican estas recomendaciones o estrategias que pemitirán afianzar mejor esta temática.

1) Concepto de equilibrio

El concepto de equilibrio y la ley de inercia de Newton están muy relacionados en física, ya que se afirma, por ejemplo en [18], cómo para que un cuerpo se encuentre en equilibrio este no debe presentar aceleración alguna. Ahora, si el cuerpo no está acelerado, esto significa, según [22], que la sumatoria de las fuerzas externas que actúan sobre él es cero ($\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = 0$). Es decir, su comportamiento es el de un cuerpo libre. Además, si este es libre se puede concluir que su estado físico de movimiento debe ser de reposo absoluto o con velocidad constante, lo que concuerda con lo afirmado al inicio de este párrafo. Por otra parte, en física mecánica se considera que un cuerpo puede presentar dos tipos de equilibrio: uno es el equilibrio traslacional y el otro es el equilibrio rotacional. El primero está relacionado con el observable físico conocido como “fuerza”, y el segundo con el observable físico llamado “torque” (este último se trata y analiza más adelante).

2) Concepto de equilibrio traslacional de un cuerpo

De acuerdo con [18], se dice que un cuerpo cualquiera se encuentra en equilibrio traslacional cuando, al sumar vectorialmente las fuerzas externas aplicadas sobre él, se obtiene como resultado un vector de fuerza neto nulo, es decir, que su aceleración debe ser cero. La ecuación matemática vectorial, según [22] y [23], que expresa lo dicho está definida de la siguiente manera:

$$\vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = m\vec{a} = (0)\,\hat{r} \tag{185}$$

Donde:

- $\vec{F}_n$: representa la fuerza neta o total que actúa sobre el cuerpo.
- $\vec{f}_1$: representa cada una de las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo.
- $(0)\hat{r}$: representa el vector nulo, el cual resulta de la suma de cada una de las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo.
- n: representa el número total de fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.
- *i*: es el índice de la sumatoria.

Así, por ejemplo, en la Fig. 194 se muestran las fuerzas que actúan sobre el tiburón que se encuentra colgando de las cuerdas atadas a los postes de los faroles de luz allí presentes.

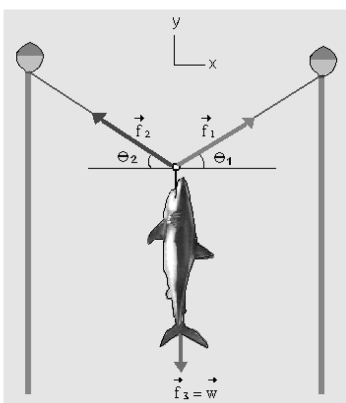


Figura 194. Fuerzas aplicadas a un tiburón que cuelga por medio de dos sogas que lo sostienen en el aire. Las fuerzas que están actuando sobre este son la fuerza $\vec{f_1}$ debido a la cuerda 1, la fuerza $\vec{f_2}$ debido a la cuerda 2, y la fuerza $\vec{f_3}$, la cual es igual a su peso. Fuente: elaboración propia

Al aplicar (185) con el fin de obtener la fuerza neta o resultante que está actuando sobre el tiburón, se obtiene:

$$\vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = (0)\,\hat{r} \tag{186}$$

Así, (186) permite obtener la fuerza neta que actúa sobre el tiburón. Además, el hecho de que el pez esté en reposo sugiere que se encuentra en equilibrio traslacional, de manera que el resultado de la suma vectorial de las fuerzas imprimidas sobre él es igual al vector de fuerza nulo. Esta fuerza $\vec{F}_n$ se puede escribir en función de sus magnitudes y de sus vectores unitarios de la siguiente forma:

$$\vec{F}_n = f_1\left[\cos\theta_1\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta_1\,\hat{\jmath}\right] + f_2\left[\cos(180-\theta_2)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(180-\theta_2)\,\hat{\jmath}\right] + f_3\left[\cos\theta_3\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta_3\,\hat{\jmath}\right] = (0)\,\hat{r}$$

donde $\theta_3 = 270^0$

Los siguientes pasos o recomendaciones adquieren mucha importancia en física mecánica a la hora de resolver problemas en los que esté involucrado un cuerpo en equilibrio físico:

- Concentre su atención en la lectura que realiza del enunciado del problema planteado. Esto con el fin de identificar los observables físicos que piden determinar, tales como fuerzas, ángulos, etc.
- Realice un diagrama de cuerpo libre para el objeto en estudio. Dibuje las fuerzas que están actuando sobre él, las cuales se representan por medio de flechas dirigidas (véanse las figuras 182, 183 y 194).
- Considere el cuerpo en observación como si fuera una partícula al tomar su centro de masa como el punto origen del sistema de coordenadas cartesianas que usted tiene que asociarle en este paso.
- Determine cada una de las fuerzas en términos de su magnitud y vector unitario.
- Realice la suma vectorial algebraica de todas las fuerzas determinadas en el paso anterior e iguale el resultado obtenido al vector nulo.
- Realice una comparación entre la igualdad de vectores obtenida en el paso anterior y determine las ecuaciones algebraicas escalares que resulten.
- Con las ecuaciones obtenidas en el paso anterior determine los obsevables físicos pedidos en el ejercicio en términos de las variables dadas.

Ejemplo 12.

Determine las fuerzas $\vec{f_1}$ y $\vec{f_2}$ y sus magnitudes expresadas en la Fig. 194, si la masa del tiburón es de 1000 kg y los valores de los ángulos son $\theta_1 = 40^0$ y $\theta_2 = 35^0$ (véase la Fig. 195).

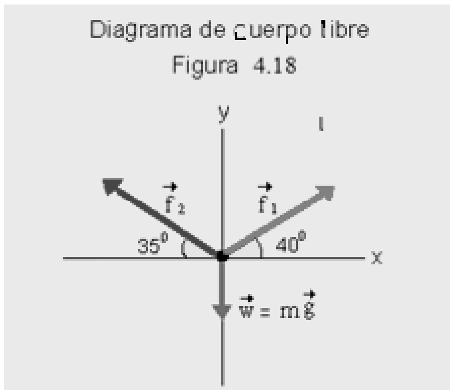


Figura 195. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actuan sobre el tiburón.
Fuente: elaboración propia

Solución

Al determinar cada uno de los vectores que se muestran en el diagrama de fuerzas de la Fig. 195, en términos de sus magnitudes y sus respectivos vectores unitarios de dirección, se tiene:

$$\vec{f}_1 = f_1(\cos 40^0\,\hat{I} + \operatorname{sen} 40^0\,\hat{J})$$

$$\vec{f}_2 = f_2(\cos 145^0\,\hat{I} + \operatorname{sen} 145^0\,\hat{J})$$

$$\vec{W} = W(-\hat{J})$$

Al reemplazar w = mg y determinar los cosenos y senos para los diferentes ángulos descritos en las primeras dos ecuaciones, así como al destruir paréntesis, se obtiene:

$$\vec{f}_1 = 0{,}766f_1\,\hat{I} + 0{,}642f_1\,\hat{J} \qquad (*)$$

$$\vec{f}_2 = -0{,}819f_2\,\hat{I} + 0{,}573f_2\,\hat{J} \qquad (**)$$

$$\vec{W} = mg(-\hat{J}) \qquad (***)$$

Al tener presente (186), es decir:

$$\vec{F}_n = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = (0)\,\hat{r}$$

Si se reemplazan (*), (**) y (***) en la ecuación anterior se obtiene:

$$(0{,}766f_1\,\hat{I} + 0{,}642f_1\,\hat{J}) + (-0{,}819f_2\,\hat{I} + 0{,}573f_2\,\hat{J}) + mg(-\,\hat{J}\,) = (0)\,\hat{r}$$

Al destruir paréntesis y agrupar términos de forma algebraica vectorial y sacar factor común se tiene que:

$$(0{,}766f_1 - 0{,}819f_2)\,\hat{I} + (0{,}642f_1 + 0{,}573f_2 - mg)\,\hat{J} = (0)\,\hat{r}$$

Si se representa el vector nulo de la forma $(0)\,\hat{r} = 0\hat{I} + 0\hat{J}$ y se reemplaza en la ecuación anterior, se tiene:

$$(0{,}766f_1 - 0{,}819f_2)\,\hat{I} + (0{,}642f_1 + 0{,}573f_2 - mg)\,\hat{J} = 0\hat{I} + 0\hat{J}$$

Al realizar la comparación vectorial indicada en la igualdad anterior, se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$0{,}766f_1 - 0{,}819f_2 = 0 \qquad (1)$$

$$0{,}642f_1 + 0{,}573f_2 - mg = 0 \qquad (2)$$

Al transponer el producto de la masa por la gravedad para el miembro derecho de la igualdad en la ecuación (2), y sustituir su resultado, esta última queda expresada así:

$$0{,}642f_1 + 0{,}573f_2 = 9800 \qquad (2)$$

Para determinar el valor de las fuerzas $\vec{f_1}$ y $\vec{f_2}$ se utiliza el método algebraico de reducción de variables o método de eliminación. Para esto, se multiplica la ecuación (1) por 0,573, y la ecuación (2) por 0,819, de manera que quedan las siguientes expresiones:

$$0{,}438f_1 - 0{,}469f_2 = 0$$

$$0{,}525f_1 + 0{,}469f_2 = 8026{,}2 \text{ New}$$

Al sumar término a término las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{array}{r} 0{,}438f_1 - 0{,}469f_2 = 0 \\ \underline{0{,}525f_1 + 0{,}469f_2 = 8026{,}2 \text{ New}} \\ 0{,}963f_1 = 8026{,}2 \text{ New} \end{array}$$

Si se pasa a dividir el valor que multiplica a f_1 al otro lado de la igualdad se obtiene:

$$f_1 = 8334{,}579\text{New}$$

Ahora, al reemplazar el valor de f_1 en la ecuación (1) tenemos:

$$0{,}766(8334{,}579\text{New}) - 0{,}819f_2 = 0$$

La expresión anterior queda expresada de la siguiente manera al realizar el producto indicado en el miembro izquierdo de la igualdad:

$$6384{,}287\text{New} - 0{,}819f_2 = 0$$

Si se despeja f_2 y se realizan las operaciones correspondientes en la expresión anterior se obtiene el valor:

$$f_2 = 7795{,}222\text{New}$$

Para determinar las fuerzas $\vec{f_1}$ y $\vec{f_2}$ se reemplazan sus magnitudes determinadas en la parte de arriba en las ecuaciones (*) y (**):

$$\vec{f}_1 = 0{,}766(8334{,}579\text{New})\,\hat{I} + 0{,}642(8334{,}579\text{New})\,\hat{J}$$

$$\vec{f}_2 = -\,0{,}819(7795{,}222\text{New})\,\hat{I} + 0{,}573(7795{,}222\text{New})\,\hat{J}$$

Al realizar las multiplicaciones indicadas en cada una de las ecuaciones anteriores se obtiene la expresión para cada una de las fuerzas, es decir:

$$\vec{f}_1 = 6384{,}287\text{New}\,\hat{I} + 5350{,}799\text{New}\,\hat{J}$$

$$\vec{f}_2 = 6384{,}286\text{New}(-\,\hat{I}) + 4466{,}662\text{New}\,\hat{J}$$

3) Concepto de torque y equilibrio rotacional de un cuerpo

a) Concepto de torque

Siempre que dos personas se encuentren jugando en un sube y baja se puede decir que sobre cada uno de ellos está actúando un torque. De acuerdo con [19] y [20], la "torca", "torque", o "momento de fuerza rotacional" es un observable físico que pertenece a la dinámica rotacional. Además de ser el responsable de la rotación de los cuerpos, depende del vector de fuerza aplicado, del vector de posición radial y del ángulo subtendido entre los dos vectores (fuerza radial). Es importante aclarar que el vector radial es el vector de posición definido entre el eje central de rotación y el punto de aplicación de la fuerza. La dirección de rotación del cuerpo depende de la dirección en la que se aplique la fuerza analizada (esta última respecto al eje central de rotación). Véase la Fig. 196.

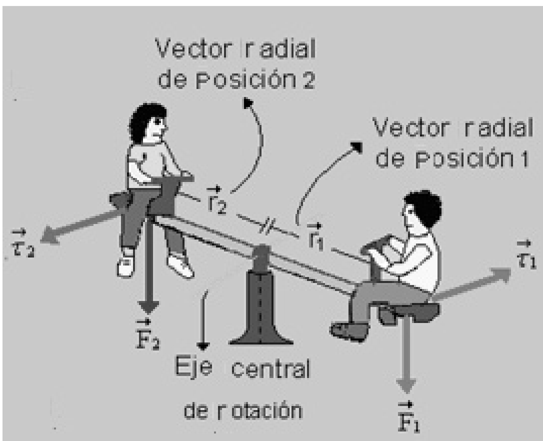


Figura 196. Dos personas se encuentran sobre un sube y baja. El hombre de la derecha le aplica un torque 1 a la mitad de la barra sobre la que se encuentra tratando de hacerla girar en el mismos sentido de las manecillas del reloj, lo anterior a causa de la magnitud de fuerza F_1 que ejerce a la distancia radial r_1 respecto al eje de rotación central. A su vez, el hombre de la izquierda le ejerce un torque 2 a la otra mitad de la barra sobre la que se encuentra tratando de hacerla girar en sentido contrario a las manecillas del reloj, a causa de la magnitud de fuerza F_2 que ejerce a la distancia radial r_2. Los torques, como se puede ver, están dirigidos en direcciones contrarias debido a los diferentes sentidos en que las fuerzas tratan de hacer rotar la barra.
Fuente: elaboración propia

Por lógica, el torque, al ser una magnitud derivada del producto vectorial entre el vector fuerza y el vector de posición radial del punto en el que se aplica esta, pertenece a las magnitudes vectoriales. Además, según [19], el torque —que pertenece al movimiento rotacional— guarda una similitud con las fuerzas culpables de los desplazamientos lineales. La ecuación matemática vectorial que representa el observable físico conocido como "torque" o "momento rotacional" de la fuerza está dada de la siguiente manera [19], [20] y [21]:

$$\vec{\tau} = \vec{\mathrm{r}}\ \mathrm{X}\ \vec{\mathrm{F}} \tag{187}$$

Donde:

- $\vec{\tau}$: representa el observable físico vectorial llamado "torque".
- $\vec{r}$: representa el vector de posición radial existente entre el eje central de rotación y el punto de aplicación de la fuerza.
- $\vec{F}$: representa la fuerza aplicada al cuerpo.

En (187) se puede observar que el torque ejercido sobre un cuerpo se deduce del producto vectorial o producto cruz entre el vector radial de posición del punto de aplicación de la fuerza y el vector fuerza aplicado al cuerpo. Esto lleva a entender también por qué este observable físico es un vector, ya que el producto cruz entre dos vectores genera otro vector, el cual es perpendicular a los dos, es decir, todo torque debe ser perpendicular al vector radial de posición y al vector fuerza que lo genera. La magnitud del torque o momento rotacional, de acuerdo con [20], [22] y [23], se deduce por medio de la siguiente expresión matemática:

$$\tau = \mathrm{rFsen}\theta \tag{188}$$

Donde:

- τ**:** representa la magnitud del torque.
- r**:** representa la magnitud del vector radial de posición $\vec{r}$ del punto de aplicación de la fuerza.
- F**:** representa la magnitud de la fuerza aplicada al cuerpo.
- θ**:** es el menor de los ángulos formados entre la línea de acción del vector fuerza con la línea direccional del vector radial.

El término *rsenθ* presente en (188), según [20], [23] y [24], es conocido como "brazo de palanca de la fuerza", la cual es la distancia del segmento de recta medido desde el eje central de rotación a la línea de acción de la fuerza. Este brazo siempre será perpendicular a la lÍnea de acción de la fuerza, es decir, entre ambos formarán ángulos de 90º (véase la Fig. 197).

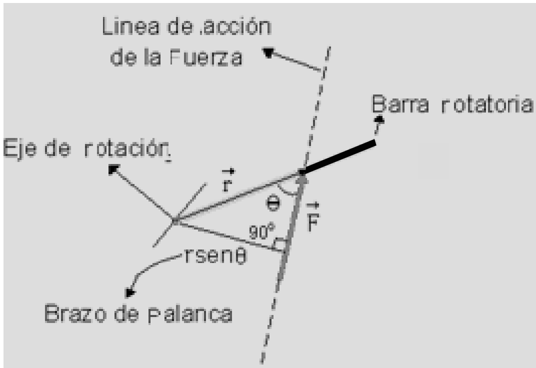


Figura 197. Brazo de palanca de la fuerza aplicada sobre una barra rotatoria. Este es perpendicular a la línea de acción de la fuerza, es decir, forman entre sí ángulos de 90º. Fuente: elaboración propia

Así, (188) nos lleva a deducir una nueva forma de expresar (187), así:

$$\vec{\tau} = (\mathrm{rFsen}\theta)\hat{\mathrm{r}} \qquad (189)$$

Donde $\hat{\mathrm{r}}$ representa el vector unitario de dirección del torque.

En la Fig. 198 se observa una barra que puede rotar alrededor de un eje central de rotación. Se muestra además la fuerza $\vec{F}$ que está actuando sobre ésta, el vector de posición radial $\vec{r}$ del punto de aplicación de la fuerza con respecto al eje, e igualmente el ángulo θ subtendido entre el vector fuerza y el vector radial.

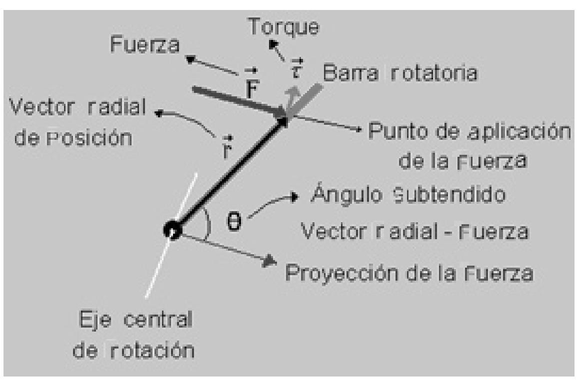


Figura 198. Fuerza actuando sobre una barra rotatoria. El punto de aplicación de la fuerza se encuentra a una distancia *r* y el ángulo subtendido entre el vector de fuerza y su vector de posición radial con respecto al eje central de rotación es θ. Se observa la dirección en la que apunta el torque. Fuente: elaboración propia

Por convención, de acuerdo con [20] y [23], se considera que si una fuerza hace girar a un cuerpo en el mismo sentido de las manecillas del reloj, su torque imprimido es negativo; sin embargo, si lo hace girar en sentido contrario este será positivo. Con el fin de entender mejor lo expresado en las figuras 199 y 200, se muestran las direcciones en las que apuntan estos debido al sentido en el que actúan las fuerzas sobre una llave mecánica para hacerla girar. Además, se determinarán las expresiónes matemáticas vectoriales que representan los torques para cada uno de los casos ilustrados en estas figuras.

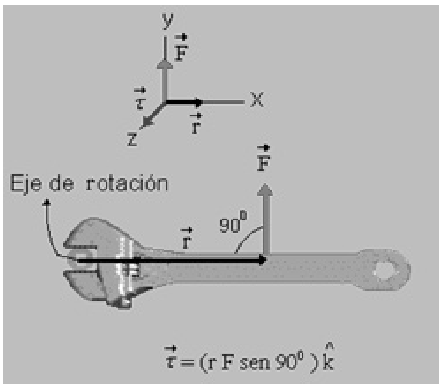


Figura 199. Fuerza actuando sobre una llave mecánica. Esta trata de hacer girar la llave en sentido contrario a las manecillas del reloj, formando un ángulo de 90^0 con respecto a su vector radial de posición. El torque para este caso es positivo, ya que apunta en la dirección del eje z^+.
Fuente: elaboración propia

Al deducir de la Fig. 199 las expresiones correspondientes para la fuerza y su vector de posición radial, y además, mediante (187), se obtiene la expresión matemática vectorial que permite determinar el torque aplicado a la llave, así:

$$\vec{r} = r\hat{I} \; ; \vec{F} = F\hat{J}$$

De (187) tenemos que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \, X \, \vec{F} = (r\,\hat{I})X(F\,\hat{J}) = rF(\hat{I} \, X \, \hat{J})$$

Como es de conocimiento, $\hat{I} \, X \, \hat{J} = \hat{k}$; así, al reemplazar en la expresión de arriba esta última equivalencia, se obtiene la expresión para el torque que actúa sobre la llave, es decir:

$$\vec{\tau} = rF\hat{k}$$

La expresión determinada anteriormente para el torque también se puede deducir mediante (189), donde $\theta = 90^0$, por tanto, tenemos que:

$$\vec{\tau} = (rF\operatorname{sen}\theta)\hat{r} = (rF\operatorname{sen}90^0)\hat{r}$$

De la Fig. 200 se tiene que $\hat{r} = \hat{k}$, además $\operatorname{sen}90^0 = 1$; por tanto, el torque pedido es:

$$\vec{\tau} = rF\hat{k}$$

Esta última expresión es igual a la que se obtuvo en la página anterior, en la que se hizo uso de (187).

Ahora, a fin de determinar la expresión matemática vectorial que representa el torque aplicado sobre la llave debido a la fuerza ilustrada en la Fig. 200, se tendrán en cuenta los mismos procedimientos matemáticos utilizados en la parte de arriba.

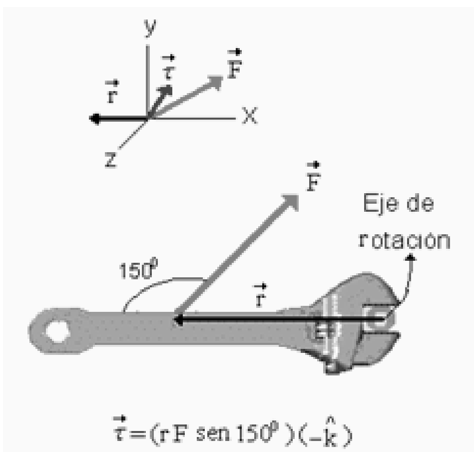


Figura 200. Fuerza actuando sobre una llave mecánica. Está trata de girar la llave en el mismo sentido de las manecillas del reloj, formando un ángulo de 150^0 con respecto a su vector radial de posición. El torque para este caso es negativo, ya que apunta en la dirección del eje *z*.
Fuente: elaboración propia

Para este caso el vector fuerza y el vector de posición radial quedan expresados por medio de las expresiones:

$$\vec{r} = r(-\hat{\imath}) \; ; \vec{F} = F(\cos 30^0\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}30^0\,\hat{\jmath})$$

A fin de determinar el vector fuerza se tomo el ángulo de 30º, ya que es el ángulo formado entre el eje *x* positivo y esta, el cual se encuentra dirigido en la dirección del vector radial. Ahora, al hacer uso de (187), es decir:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \text{ X } \vec{F}$$

Al reemplazar el vector radial y el vector de fuerza en (187), tenemos:

$$\vec{\tau} = \left[r(-\hat{I}) \right] \text{X} \left[F(\cos 30^0 \hat{I} + \text{sen}30^0 \hat{J}) \right]$$

Al obtener el coseno y el seno del ángulo de 30^0 y pasar a multiplicar la magnitud *F* de la fuerza en el segundo corchete de la expresión anterior se obtiene:

$$\vec{\tau} = \left[r(-\hat{I}) \right] \text{X} \left(0{,}89F\,\hat{I} + 0{,}45F\,\hat{J} \right)$$

Si se aplica la propiedad distributiva del producto cruz entre vectores indicado en la parte de arriba, y se tiene cuidado de guardar el orden de la operación, se obtiene:

$$\vec{\tau} = r(-\hat{I}) \text{ X}(0{,}89F\,\hat{I}) + r(-\hat{I})\text{X}(0{,}45F\,\hat{J})$$

La expresión anterior se puede escribir también de la siguiente forma:

$$\vec{\tau} = 0{,}89Fr\left[(-\hat{I}) \text{ X}(\hat{I}) \right] + 0{,}45Fr\left[(-\hat{I})\text{X}(\hat{J}) \right]$$

Al realizar los productos cruz entre vectores unitarios indicados en cada uno de los corchetes de la expresión de arriba se encuentra que:

$$\vec{\tau} = 0{,}45Fr(-\hat{k})$$

Recuerde que $(-\hat{I}) \text{ X}(\hat{I}) = 0$ y $(-\hat{I})\text{X}(\hat{J}) = -\hat{k}$.

Ahora, se determina el torque general aplicado a la llave y ejercido por la fuerza observada en la Fig. 200. Para esto se hace uso de (189), donde $\theta = 30^0$, ya que es el menor de los ángulos formado entre la línea de acción de la fuerza y la línea direccional del vector radial, por tanto, tenemos que:

$$\vec{\tau} = (rF\text{sen}\theta)\hat{r} = (rF\text{sen}30^0)\hat{r}$$

De la Fig. 200 se obtiene que $\hat{r} = -\hat{k}$ además $\text{sen}30^0 = 0{,}45$. Por tanto, el torque pedido está dado por:

$$\vec{\tau} = 0{,}45rF(-\hat{k})$$

El resultado anterior es el mismo que se determinó en la parte de arriba, en la que se utilizó (187).

Ejemplo 13.

Determine: a) en la Fig. 201 el torque que ejerce la fuerza de 30 N sobre la llave inglesa, y b) la magnitud del torque.

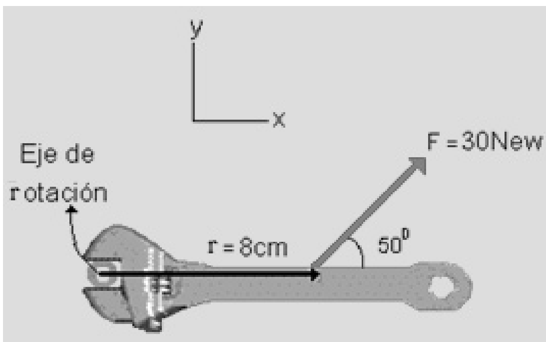


Figura 201. Fuerza actuando sobre una llave inglesa para hacerla girar en sentido contrario a las manecillas del reloj. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Primero, se determina la fuerza y el vector de posición de su punto de aplicación con las siguientes expresiones:

$$\vec{F} = 30New(\cos50^0\,\hat{I} + \text{sen}50^0\,\hat{J})$$

$$\vec{r} = 8cm\,\hat{I} = 0{,}08m\,\hat{I}$$

Al hallar el coseno y seno de 50^0 en la primera expresión, y pasar a multiplicar el valor de fuerza que se encuentra fuera del paréntesis por cada una de las componentes vectoriales resultantes, se obtiene:

$$\vec{F} = 19{,}283New\,\hat{I} + 22{,}981New\,\hat{J}$$

Con el fin de dar respuesta a la pregunta del ejercicio se hace uso de (187), es decir:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \, X \, \vec{F}$$

Al reemplazar ahora los vectores de fuerza y posición expresados en la expresión de arriba, tenemos que:

$$\vec{\tau} = (0{,}08m \, \hat{I}) X \; (19{,}283New \, \hat{I} + 22{,}981New \, \hat{J})$$

Si se desarrolla el producto cruz indicado en la ecuación anterior se obtiene el torque ejercido por la fuerza sobre la llave inglesa, así:

$$\vec{\tau} = 1{,}838m \cdot New \hat{k}$$

Recuerde que $\hat{I} X \hat{I} = 0$ y $\hat{I} X \hat{J} = \hat{k}$.

b) La magnitud del torque se determina mediante (188), es decir:

$$\tau = rFsen\theta$$

Con:

$$r = 0{,}08m \; ; \; F = 30New \text{ y } \theta = 50^0$$

Al reemplazar los valores anteriores en (188), se tiene:

$$\tau = (0{,}08m)(30New)sen50^0$$

Si se desarrollan las operaciones indicadas en la parte de arriba se obtiene la magnitud del torque, así:

$$\tau = 1{,}838m \cdot New$$

Si se observa bien la magnitud de torque anterior, ésta es igual al valor que aparece al multiplicar al vector unitario $\hat{k}$ del torque determinado en el inciso a), lo cual siempre debe ser así.

Ejemplo 14.

Determine en la Fig. 202 el torque aplicado a la barra rotatoria por la persona; considere su masa despreciable.

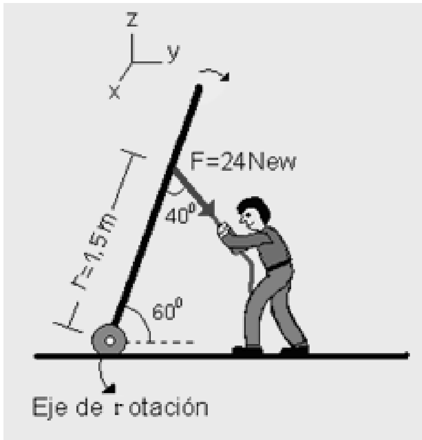


Figura 202. Persona aplicando una fuerza sobre una barra rotatoria. Fuente: elaboración propia

Solución

El diagrama de cuerpo libre de la fuerza aplicada por la persona y el vector de posición de su punto de aplicación se expresan en la Fig. 203.

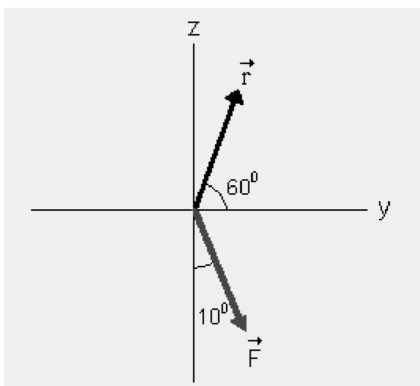


Figura 203. Diagrama de fuerza y brazo de palanca. Fuente: elaboración propia

La Fig. 203 permite determinar matemáticamente el vector de fuerza y el vector de posición de su punto de aplicación, así:

$$\vec{F} = 24New(\cos 280^0\,\hat{J} + \mathrm{sen}280^0\,\hat{k})$$

$$\vec{r} = 1,5m(\cos 60^0\,\hat{J} + \mathrm{sen}60^0\,\hat{k})$$

Al hallar los valores del coseno y el seno para los ángulos de 280^0 y 60^0, y al remplazarlos en cada una de las expresiones de arriba, se tiene que:

$$\vec{F} = 24New(0{,}173\,\hat{J} - 0{,}984\,\hat{k})$$

$$\vec{r} = 1{,}5m(0{,}5\,\hat{J} + 0{,}866\,\hat{k})$$

Si se pasa a multiplicar cada uno de los valores que se encuentran en la parte de afuera de los paréntesis en las expresiones anteriores se obtiene:

$$\vec{F} = 4{,}152New\,\hat{J} - 23{,}616New\,\hat{k}$$

$$\vec{r} = 0{,}75m\,\hat{J} + 1{,}299m\,\hat{k}$$

Ahora, para determinar el torque ejercido por la persona sobre la barra rotatoria se hace uso de (187), es decir:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\ X\ \vec{F}$$

Al reemplazar en la ecuación de arriba el vector de fuerza y el vector de posición de su punto de aplicación, determinados anteriormente, se tiene:

$$\vec{\tau} = (0{,}75m\,\hat{J} + 1{,}299m\,\hat{k})\ X\ (4{,}152New\,\hat{J} - 23{,}616New\,\hat{k})$$

Si se desarrolla el producto cruz indicado en la expresión de arriba se obtiene:

$$\vec{\tau} = -17{,}712m \cdot New\,\hat{I} - 5{,}393m \cdot New\,\hat{I}$$

Al reducir términos semejantes se deduce, finalmente, el torque ejercido sobre la barra por la persona, es decir:

$$\vec{\tau} = 23{,}105m \cdot New(-\hat{I})$$

El resultado anterior nos índica que el torque se dirige hacia dentro de la página, lo cual es correcto.

El torque pedido en este ejemplo también se puede determinar mediante (189), es decir:

$$\vec{\tau} = (rFsen\theta)\,\hat{r}$$

Donde:

$$F = 24New\ ;\ r = 1{,}5m\ ;\ \theta = 40^0\ y\ \hat{r} = -\hat{I}$$

Se toma $\theta = 40^0$, ya que la Fig. 203 muestra que este es el menor valor de los ángulos formados entre el vector brazo de palanca y la línea de acción de la fuerza. Entonces, al reemplazar los valores de fuerza, el vector de posición, el ángulo y el vector unitario de dirección en (187), tenemos:

$$\vec{\tau} = (1{,}5\text{m})(24\text{New})(\text{sen}40^0)(-\hat{\text{I}})$$

Si se realizan las operaciones correspondientes en la expresión anterior se obtiene el vector torque pedido, es decir:

$$\vec{\tau} = (1{,}5\text{m})(24\text{New})(0{,}642)(-\hat{\text{I}}) = 23{,}112\text{m} \cdot \text{New}(-\hat{\text{I}})$$

La diferencia entre este resultado y el obtenido en la primera parte se debe, más que todo, al número de decimales que se tomen en las operaciones. Sin embargo, como se puede observar, estas diferencias son mínimas, por tanto, se puede decir que el resultado es el mismo.

Ahora bien, En la Fig. 204 se muestra a dos personas que tratan de hacer rotar un molino de caña. La persona 1 ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ sobre el punto P_1 que se encuentra en la parte izquierda del brazo de madera de la maquina en la posición $\vec{r}_1$, medida esta última respecto al eje central de rotación. En el mismo instante la persona 2 le aplica una fuerza $\vec{F}_2$ al punto P_2 que se localiza en la parte derecha del mismo brazo en la posición $\vec{r}_2$, medida también respecto al mismo eje de rotación. Además, el hecho de que existan fuerzas aplicadas al molino y que cada una de ellas tenga asociado un brazo de palanca diferente de cero nos lleva a afirmar que estas están ejerciendo torques sobre el aparato, es decir, la fuerza $\vec{F}_1$ le ejerce el torque $\vec{\tau}_1$, el cual está dirigido hacia la parte de arriba del plano de la página, y la segunda fuerza $\vec{F}_2$ le ejerce el torque $\vec{\tau}_2$, orientado este último hacia la parte de abajo del mismo plano. Ahora, dado que sobre el molino de caña mostrado en la Fig. 204 se está ejerciendo más de un torque, es necesario determinar el torque resultante que esta actúando sobre él. Por tanto, en física mecánica se conoce como "torque resultante de un cuerpo", de acuerdo con [20], a la suma vectorial de todos los torques aplicados a este. La ecuación matemática vectorial que nos permite determinar el torque resultante que actúa sobre un objeto en particular, de acuerdo con [21] y [22], está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{\tau}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i X \vec{F}_i \tag{190}$$

Donde:

- $\vec{\tau}_r$: representa el torque resultante que actúa sobre el cuerpo.
- $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i X \vec{F}_i$: representa los torques individuales generados por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
- n: es el número total de torques que actúan sobre el cuerpo debido a las fuerzas.
- *i*: es el índice de la sumatoria.

Para el caso partícular del molino de caña ilustrado en la Fig. 204, el torque resultante ejercido sobre él por las dos personas que lo manipulan queda expresado de la siguiente manera:

$$\vec{\tau}_r = \sum_{i=1}^{2} \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 X \vec{F}_1 + \vec{r}_2 X \vec{F}_2$$

Además, dado que tanto los vectores de fuerzas como los de posición se encuentran en un mismo plano, y se tiene también que $\vec{f}_2 > \vec{f}_1$ y $\vec{r}_2 > \vec{r}_1$, concluimos que el torque resultante es diferente de cero, y el sentido en que apunta es hacia abajo. Lo anterior lleva a concluir que la barra central del molino en el que se apoyan las dos personas rotará en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

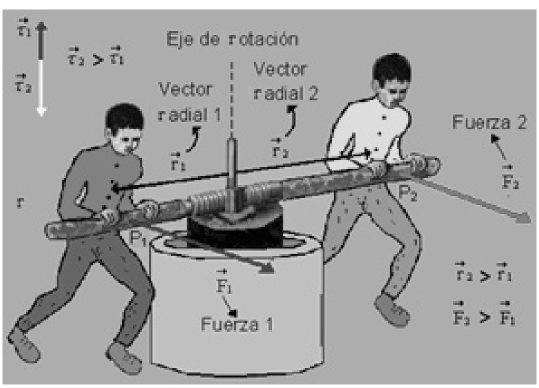


Figura 204. Dos personas ejercen torques sobre un molino de caña, debido a las fuerzas y vectores de posición de los puntos donde son aplicados. Tanto los vectores de fuerza como los de posición se encuentran en un mismo plano. La persona 1 le genera al aparato un torque τ_1 hacia arriba, y la persona 2 le crea un torque $\vec{\tau}_2$ de mayor magnitud que el primero, pero dirigido hacia abajo. Lo anterior crea un torque neto o resultante diferente de cero, cuya dirección es la misma que presenta el torque de mayor magnitud. Fuente: elaboración propia

Los siguientes pasos son esenciales a la hora de calcular el torque resultante que actúa sobre un cuerpo en particular:

- Leer el problema muy detenidamente y de manera apropiada, con el fin de identificar, además de las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo, sus respectivos puntos de aplicación.
- Realizar un diagrama de cuerpo libre en el que debe estar identificado el punto o eje central de rotación del cuerpo, las fuerzas que están actuando sobre él y los respectivos vectores de posición de sus puntos de aplicación, medidos estos últimos respecto al eje de giro.
- Definir matemáticamente los vectores fuerza y los vectores de posición de sus punto de aplicación de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre.
- Con los vectores fuerzas y los vectores de posición de sus puntos de aplicación se determinan los torques generados por cada una de ellas, haciendo uso de (187).
- Finalmente, al aplicar (190) a los torques hallados, se determina el vector resultante o torque total que actúa sobre el cuerpo.

Ejemplo 15.

a) Determine en la Fig. 205 el torque resultante generado por todas las fuerzas que están actuando sobre la barra que puede rotar alrededor del punto A. La barra y las fuerzas aplicadas sobre ella se encuentran en el plano *xy*.

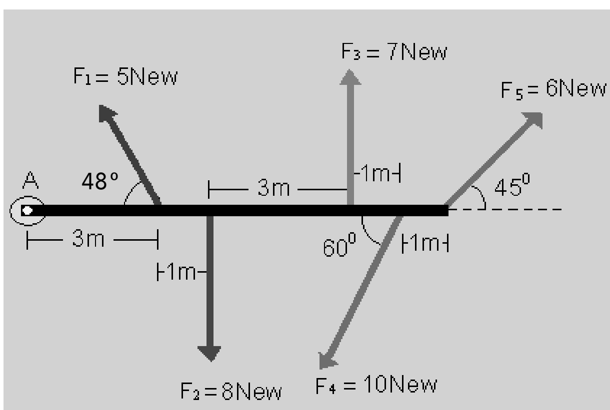


Figura 205. Fuerzas actuando sobre una barra rotatoria. Fuente: elaboración propia

Solución

Se determina primero la expresión general para cada uno de los vectores fuerzas y su respectivo vector posición de aplicación, así:

$$\vec{F}_1 = 5\,New(\cos 132^0\,\hat{I} + sen132^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_1 = 3m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_2 = 8\,New(\cos 270^0\,\hat{I} + sen270^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_2 = 4m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_3 = 7\,New(\cos 90^0\,\hat{I} + sen90^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_3 = 7m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_4 = 10\,New(\cos 240^0\,\hat{I} + sen240^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_4 = 8m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_5 = 6\,New(\cos 45^0\,\hat{I} + sen45^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_5 = 9m\,\hat{I}$$

Al hallar los valores del coseno y seno para los ángulos respectivos en las expresiones de fuerzas anteriores, y multiplicar el resultado por el valor que se encuentra fuera del paréntesis, éstas quedan definidas de la siguiente manera:

$$\vec{F}_1 = -3{,}345New\,\hat{I} + 3{,}715New\,\hat{J}\ ;\ \vec{r}_1 = 3m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_2 = -8New\,\hat{J}\ ;\ \vec{r}_2 = 4m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_3 = 7New\,\hat{J}\ ;\ \vec{r}_3 = 7m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_4 = 5New\,\hat{I} + 8{,}66New\,\hat{J}\ ;\ \vec{r}_4 = 8m\,\hat{I}$$

$$\vec{F}_5 = 4{,}242\,\hat{I} + 4{,}242New\,\hat{J}\ ;\ \vec{r}_5 = 9m\,\hat{I}$$

Ahora, a fin de determinar cada uno de los torques se hace uso de (187), es decir:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\ X\ \vec{F}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\vec{\tau}_1 = (3m\,\hat{I})\ X\ (-3{,}345New\,\hat{I} + 3{,}715New\,\hat{J})$$

$$\vec{\tau}_2 = (4m\,\hat{I})\ X\ (-8New\,\hat{J})$$

$$\vec{\tau}_3 = (7m\,\hat{I})\ X\ (7New\,\hat{J})$$

$$\vec{\tau}_4 = (8m\,\hat{I})\ X\ (5New\,\hat{I} - 8{,}66New\,\hat{J})$$

$$\vec{\tau}_5 = (9m\,\hat{I})\ X\ (4{,}242New\,\hat{I} + 4{,}242New\,\hat{J})$$

Al desarrollar los productos cruz indicados en la parte de arriba, se obienen los torques generados por cada una de ellas:

$$\vec{\tau}_1 = 11{,}145\text{m}\cdot\text{New}\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_2 = -32\text{m}\cdot\text{New}\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_3 = 49\text{m}\cdot\text{New}\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_4 = -69{,}28\text{m}\cdot\text{New}\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_5 = 38{,}178\text{m}\cdot\text{New}\hat{k}$$

Para determinar el torque resultante se utiliza (190), es decir:

$$\vec{\tau}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i$$

Al reemplazar cada uno de los torque determinados en la parte de arriba en (190) y sacar factor común, tenemos:

$$\vec{\tau}_r = (11{,}145 - 32 + 49 - 69{,}28 + 38{,}178)\text{m}\cdot\text{New}\hat{k}$$

Si se resuelve la suma y la resta de términos indicadas dentro del paréntesis en la expresión anterior, se obtiene, finalmente, el torque resultante, es decir:

$$\vec{\tau}_r = -2{,}957\text{m}\cdot\text{New}\hat{k} = 2{,}957\text{m}\cdot\text{New}(-\hat{k})$$

El resultado anterior indica que el torque resultante obtenido hará girar el cuerpo en la misma dirección de las manecillas del reloj.

- **Equilibrio rotacional**

Ahora bien, se dice que un cuerpo se encuentra en equilibrio rotacional cuando, al sumar vectorialmente todos los torques aplicados sobre él, se obtiene como resultado el vector de torque nulo [20]. La ecuación matemática vectorial, de acuerdo con [22] y [24], la cual expresa el equilibrio rotacional del cuerpo, está dada por:

$$\vec{\tau}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = (0)\hat{r} \qquad (191)$$

Donde: $(0)\hat{r}$ representa el vector de torque nulo, el cual resulta de la suma de cada uno de los torques individuales que estan actuando sobre el cuerpo.

Ejemplo 16.

En la Fig. 206 se muestra una barra de 2 m de longitud que puede rotar alrededor del punto A. Esta sostiene un tiburón en el otro extremo y es equilibrada por medio de dos cuerdas atadas a unos postes farol. Al utilizar el concepto de equilibrio rotacional calcule: a) el valor del torque ejercido por el peso del tiburón; b) la magnitud del torque del tiburón; c) la magnitud de su peso.

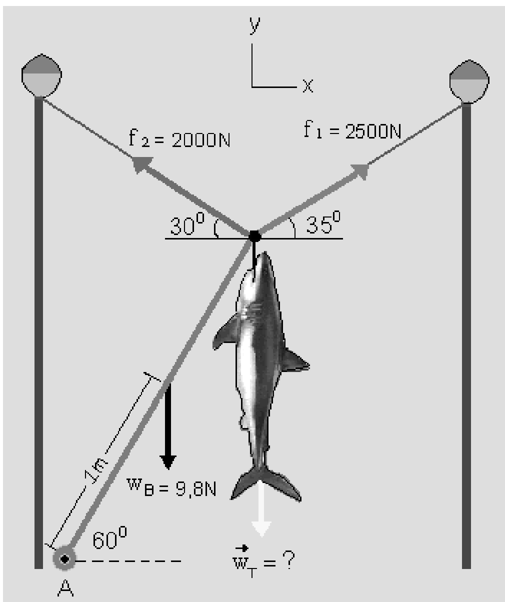


Figura 206. Tiburón colgando de una barra rotatoria que se encuentra ademas sostenida por dos cuerdas. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Primero, se determina cada uno de los torques generados por las fuerzas aplicadas a la barra que rota respecto al punto A. Para esto hacemos uso de (191), es decir:

$$\vec{\tau}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = (0)\hat{r}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\vec{\tau}_B + \vec{\tau}_{f_1} + \vec{\tau}_{f_2} + \vec{\tau}_T = (0)\hat{r}$$

Donde:

- $\vec{\tau}_B$: es el torque generado por la fuerza del peso $\vec{w}_B$ de la barra.
- $\vec{\tau}_{f1}$: es el torque generado por la fuerza de tensión $\vec{f}_1$ debido a la cuerda 1.
- $\vec{\tau}_{f2}$: es el torque generado por la fuerza de tensión $\vec{f}_2$ debido a la cuerda 2.
- $\vec{\tau}_T$: es el torque generado por la fuerza del peso $\vec{w}_T$ del tiburón.
- $\hat{r} = \hat{k}$: es la dirección del torque resultante de magnitud cero.

Cada una de las fuerzas generadoras de torque en la barra y sus respectivos vectores de posición quedan definidos de la siguiente manera, al tener en cuenta la Fig. 206:

$$\vec{w}_B = 9{,}8\text{New}(\cos 270^0\,\hat{I} + \text{sen}270^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_B = 1\text{m}(\cos 60^0\,\hat{I} + \text{sen}60^0\,\hat{J})$$

$$\vec{f}_1 = 2500\text{New}(\cos 35^0\,\hat{I} + \text{sen}35^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_{f_1} = 2\text{m}(\cos 60^0\,\hat{I} + \text{sen}60^0\,\hat{J})$$

$$\vec{f}_2 = 2000\text{New}(\cos 150^0\,\hat{I} + \text{sen}150^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_{f_2} = 2\text{m}(\cos 60^0\,\hat{I} + \text{sen}60^0\,\hat{J})$$

$$\vec{w}_T = w_T(\cos 270^0\,\hat{I} + \text{sen}270^0\,\hat{J})\ ;\ \vec{r}_B = 2\text{m}(\cos 60^0\,\hat{I} + \text{sen}60^0\,\hat{J})$$

Ahora, al determinar los valores de los senos y cosenos de los correspondientes ángulos en las expresiones anteriores y multiplicar por los valores, fuera de los paréntesis, se obtiene:

$$\vec{w}_B = 9{,}8\text{New}(-\hat{J})\ ;\ \vec{r}_B = 0{,}5\text{m}\,\hat{I} + 0{,}86\text{m}\,\hat{J}$$

$$\vec{f}_1 = 2047{,}88\text{New}\,\hat{I} + 1433{,}94\text{New}\,\hat{J}\ ;\ \vec{r}_{f_1} = 1\text{m}\,\hat{I} + 1{,}732\text{m}\,\hat{J}$$

$$\vec{f}_2 = -1732{,}05\text{New}\,\hat{I} + 1000\text{New}\,\hat{J}\ ;\ \vec{r}_{f_2} = 1\text{m}\,\hat{I} + 1{,}732\text{m}\,\hat{J}$$

$$\vec{w}_T = w_T(-\hat{J})\ ;\ \vec{r}_B = 1\text{m}\,\hat{I} + 1{,}732\text{m}\,\hat{J}$$

Al hallar cada uno de los torques debido a las fuerzas tenemos que:

$$\vec{\tau}_B = (0{,}5\text{m}\,\hat{\text{I}} + 0{,}86\text{m}\,\hat{\text{J}})\text{X}\left[9{,}8\text{New}(-\hat{\text{J}})\right] = 4{,}9\text{N.m}(-\hat{\text{k}}) \quad (2)$$

$$\vec{\tau}_{f_1} = (1\text{m}\hat{\text{I}} + 1{,}732\text{m}\,\hat{\text{J}})\text{X}(2047{,}88\text{New}\,\hat{\text{I}} + 1433{,}94\text{New}\,\hat{\text{J}}) = 2112{,}98\text{N.m}(-\hat{\text{k}}) \quad (3)$$

$$\vec{\tau}_{f_2} = (1\text{m}\hat{\text{I}} + 1{,}732\text{m}\,\hat{\text{J}})\text{X}(-1732{,}05\text{New}\,\hat{\text{I}} + 1000\text{New}\,\hat{\text{J}}) = 3999{,}91\text{N.m}\,\hat{\text{k}} \quad (4)$$

$$\vec{\tau}_T = \tau_T\,(-\hat{\text{k}}) \quad (5)$$

Si se reemplazan las expresiones (2), (3), (4) y (5) en (1), tenemos:

$$4{,}9\text{N.m}(-\hat{\text{k}}) + 2112{,}98\text{N.m}(-\hat{\text{k}}) + 3999{,}91\text{N.m}\,\hat{\text{k}} - \tau_T\,\hat{\text{k}} = (0)\,\hat{\text{r}}$$

Al sacar como factor común el vector unitario $\hat{\text{k}}$ en la parte izquierda de la expresión anterior, tenemos:

$$(-4{,}9\text{N.m} - 2112{,}98\text{N.m} + 3999{,}91\text{N.m} - \tau_T)\,\hat{\text{k}} = (0)\,\hat{\text{r}}$$

Al realizar las operaciones correspondientes indicadas en el paréntesis de la parte izquierda en la expresión anterior se obtiene:

$$(1882{,}03\text{N.m} + \tau_T)\,\hat{\text{k}} = (0)\,\hat{\text{r}}$$

Si se realiza una comparación vectorial en la expresión anterior se concluye que:

$$1882{,}03\text{N.m} - \tau_T = 0 \text{ donde, } \hat{\text{r}} = \hat{\text{k}}$$

Si se despeja τ_T en la primera expresión de arriba se obtiene la magnitud del torque que actúa en la barra debido al peso del tiburón, así:

$$\tau_T = 1882{,}03\text{N.m}$$

b) El torque del tiburón se halla al reemplazar el valor determinado en la parte de arriba en la expresión (5), es decir:

$$\vec{\tau}_T = 1882{,}03\text{N.m}(-\hat{\text{k}})$$

c) Para determinar el valor del peso del tiburón se hace uso de la expresión:

$$r_B\, w_B \text{sen}\theta_B = \tau_T$$

Donde:

$$r_B = 2m \ ; \mathrm{sen}\theta_B = \mathrm{sen}\ 30^0 \ ; \tau_T = 1882{,}03N.m$$

Al despejar el valor del peso w_B del tiburón en la expresión de arriba y reemplazar los valores dados correspondientes a los otros términos se obtiene:

$$w_B = \frac{\tau_T}{r_B \mathrm{sen}\theta_B} = \frac{1882{,}03N.m}{(2m)\mathrm{sen}\ 30^0} = \frac{1882{,}03N.m}{(2m)\mathrm{sen}\ 30^0} = 1882{,}03N$$

F. Resumen Unidad 4

A continuación, se sintetizan aspectos relevantes de la unidad en los siguientes puntos:

- *Concepto de fuerza.* Según Newton, la fuerza aplicada a un cuerpo no es más que la razón de cambio de su momento lineal con respecto al tiempo. Matemáticamente se define como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (1)$$

Donde $\vec{p}$ es el momento lineal del cuerpo dado por $\vec{p} = m\vec{v}$, con $\vec{v}$ la velocidad y m su masa.

Cuando la masa del cuerpo en movimiento no cambia en el transcurso del tiempo, la ecuación que define la fuerza externa que actúa sobre él es:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2)$$

- *Clasificación de las fuerzas.* Las fuerzas se clasifican en fuerzas de acción a distancia y fuerzas de contacto. Según su naturaleza las fuerzas presentan la siguiente clasificación:
  - Fuerza nuclear débil.
  - Fuerza nuclear fuerte.
  - Fuerza electromagnética.
  - Fuerza gravitacional.
- *Fuerza de fricción.* Es aquella fuerza que se opone al movimiento de los cuerpos y siempre trata de mantener o llevar la velocidad a cero. Esta

pertenece a las llamadas “fuerzas de contacto”, ya que se presenta siempre que dos cuerpos con superficies rugosas hagan contacto entre sí. Dentro de este tipo de fuerza tenemos la fuerza de fricción estática, la cinética y la que se da por rodamiento:

$\vec{F}_e = \mu_e N\hat{r}_e$: fuerza de fricción estática
$\vec{F}_c = \mu_c N\hat{r}_c$: fuerza de fricción cinética
$\vec{F}_r = \mu_r N\hat{r}_r$: fuerza de fricción por rodamiento

- *Coeficiente de fricción (μ)*. Es una propiedad que presenta todo cuerpo con superficies rústicas. Su valor depende del grado de rusticidad del material. De acuerdo con el tipo de fuerza de contacto existente entre las superficies, encontramos tres tipos de coeficiente de rozamiento: coeficiente de rozamiento estático, cinético y por rodamiento.
- *Las leyes de Newton*. Las tres leyes de Newton son muy importantes en la dinámica de los cuerpos, ya que estas, además de explicar su movimiento, permiten también el análisis de sus causas y efectos. Estas son: la ley de inercia, ley de fuerzas y ley de acción y reacción:

$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$: ecuación general ley de fuerzas
$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$: ecuación ley de acción y reacción

- *Diagrama de cuerpo libre*. Es un esquema de tipo geométrico vectorial en el que se ilustran todas las fuerzas externas ejercidas sobre el cuerpo. En este los detalles no son tan relevantes.
- *Fuerzas aplicadas en el movimiento circular.* Las fuerzas aplicadas en el movimiento circular dependen de si este es uniforme o uniformemente acelerado. Si el movimiento es del tipo circular uniforme, la fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza centrípeta. Si es un movimiento circular uniformemente acelerado, las fuerzas aplicadas al móvil son la fuerza centrípeta y la llamada “fuerza tangencial”:

$\vec{F}_C = m\vec{a}_c = m(\vec{w} \times \vec{v}_T)$: fuerza centrípeta
$\vec{F}_T = m\vec{a}_T = m(\vec{\alpha} \times \vec{r})$: fuerza tangencial

- *Torque*. Es el responsable de la rotación de los cuerpos. Matemáticamente, se define de la siguiente manera:

$\vec{\tau} = \vec{r} \, X \, \vec{F}$

$\vec{\tau}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i X \vec{F}_i$: ecuación torque resultante

- *Equilibrio de un cuerpo.* Un cuerpo está en equilibrio total si tanto la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él (fuerza neta) como la suma de sus torques (torque neto) son iguales a cero. Al primer caso se le denomina "equilibrio traslacional", y al segundo "equilibrio rotacional", es decir:

$$\vec{F}_{Neta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = 0 \text{ Equilibrio traslacional}$$

$$\vec{\tau}_{Neto} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = 0 \text{ Equilibrio rotacional}$$

G. Ejercicios de aplicación

1) Problemas de la Segunda Ley de Newton

a. Determine la fuerza externa aplicada a un cuerpo de masa m = 10 kg que se desplaza en dirección x con una magnitud de aceleración de 2 m/s2, y b) ¿cuál es la magnitud de esta fuerza?

b. ¿Qué aceleración presenta un cuerpo de masa m = 40 kg, al cual se le aplica una magnitud de fuerza de 400 N en dirección y positiva, y b) ¿cuál es la dirección de la aceleración del cuerpo?

c. Determine la masa de un cuerpo al cual se le aplicó una magnitud de fuerza de 10 000 N, imprimiéndole esta última una magnitud de aceleración de 50 m/s2.

d. Un automóvil de peso 400 000 N se mueve con magnitud de aceleración 20 m/s^2. Determine la fuerza aplicada al automóvil si este se mueve en dirección z positiva.

e. Una moto de masa 200 kg, pasa de 50 m/s a 110 m/s en un tiempo t = 5 s. Determine la fuerza imprimida a la moto si su aceleración es constante.

f. Un sistema de hombre-cicla de masa 90 kg se mueven con rapidez constante de 46 m/s en dirección del eje y negativo. El ciclista imprime de repente los frenos a causa de un transeúnte que se cruza en la vía. Si el sistema hombre y cicla demoran seis segundos en detenerse antes de chocar con el transeúnte, ¿cuál es la fuerza externa aplicada al sistema hombre-cicla?

2) Problemas de la Segunda Ley de Newton utilizando diagramas de cuerpo libre

a. Una caja de madera de masa 22,5 kg se mueve hacia la parte baja de una rampa de madera, la cual presenta una inclinación de 30° respecto a la línea horizontal. Si la superficie de la rampa presenta un coeficiente de rozamiento cinético de 0,01 y la caja se encuentra bajo la influencia de la fuerza de gravedad, ¿cuál es la aceleración de la caja?, y, ¿cuál es la fuerza normal que actúa sobre ella?

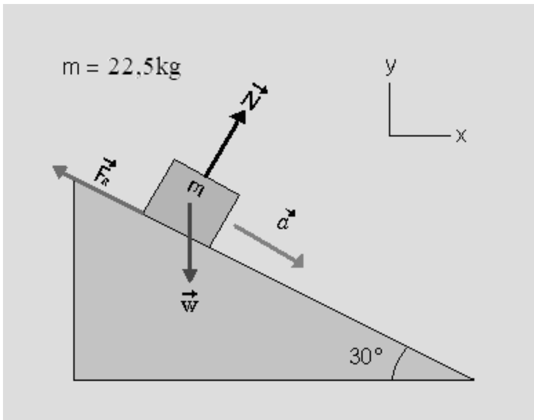


Figura 207. Cuerpo deslizándose por un plano inclinado. Fuente: elaboración propia

b. Una caja de madera de 44 kg de masa es remolcada por una persona sobre una superficie rústica de coeficiente de rozamiento cinético 0,2. Determine la fuerza ejercida por la persona y su magnitud, si esta última le genera a la caja una magnitud de aceleración de 2 m/s^2, tal como se muestra en la Fig. 208.

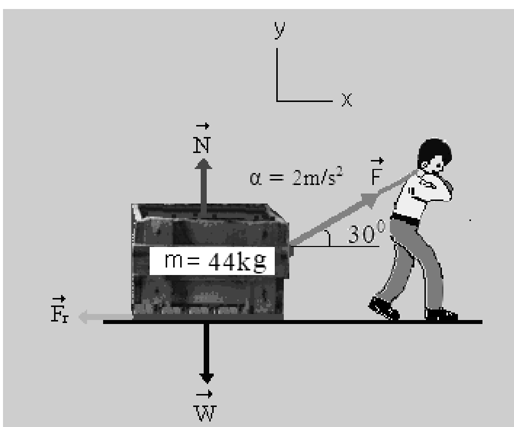


Figura 208. Caja halada por una persona en movimiento. Fuente: elaboración propia

c. Dos bloques de masas m_1 = 2kg y m_2 = 10kg se encuentran conectadas a través de una cuerda que pasa por una polea adherida a una mesa, tal como se muestra en la Fig. 209. El peso de la masa m_2 hace que la masa m_1 se deslice sobre la superficie de la mesa en la cual reposa. Si el coeficiente de rozamiento cinético de la superficie es 0,005, determine: la aceleración sufrida por la masa m_1, la tensión en la cuerda y la fuerza normal ejercida sobre la masa m_1.

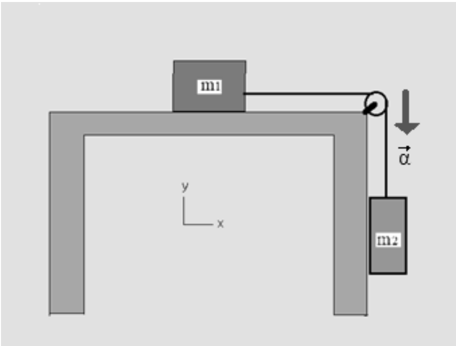


Figura 209. Dos masas conectadas por medio de una cuerda a una polea.
Fuente: elaboración propia

d. Un elefante tira de una carreta de masa 50 kg con una magnitud de fuerza de 3200 N. Si la superficie sobre la cual se mueve la carreta tiene un coeficiente de rozamiento rodante de 0,04, determine: la fuerza normal aplicada a la carreta por la superficie sobre la cual se mueve, la aceleración imprimida por el elefante a la carreta, la fuerza de rozamiento en la carreta y la tensión en la cuerda (véase la Fig. 210).

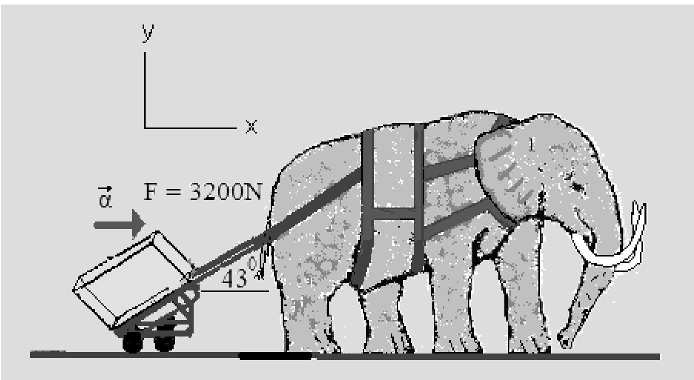


Figura 210. Elefante tirando a una carreta de masa 50kg. Fuente: elaboración propia

e. Una masa m_2 = 3 kg es arrastrada hacia arriba del plano inclinado que se muestra en la Fig. 211, por una masa m_1 = 12 kg. Si la aceleración del sistema es de 0,2 m/s, determine: el coeficiente de rozamiento del sistema, la fuerza de rozamiento de la superficie inclinada, la tensión de la cuerda y la fuerza normal ejercida sobre la masa m_2.

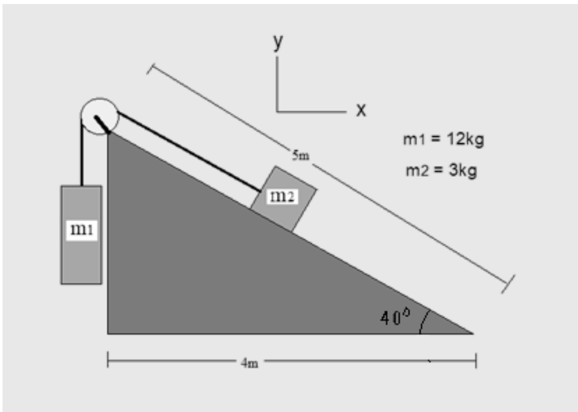


Figura 211. Masas conectadas a una polea por medio de cuerda. Fuente: elaboración propia

3) Problemas de la Tercera Ley de Newton

a. Dos bloques de madera, de masas m_1 y m_2, se encuentran unidos, tal como se muestra en la Fig.212, sobre una superficie lisa. Si sobre la masa de 32 kg se aplica una magnitud de fuerza f = 254 N, ¿cuál es la fuerza que ejerce la masa m_2 sobre la m_1?, y, ¿cuál es la aceleración que le imprime la fuerza *f* al sistema de masas?

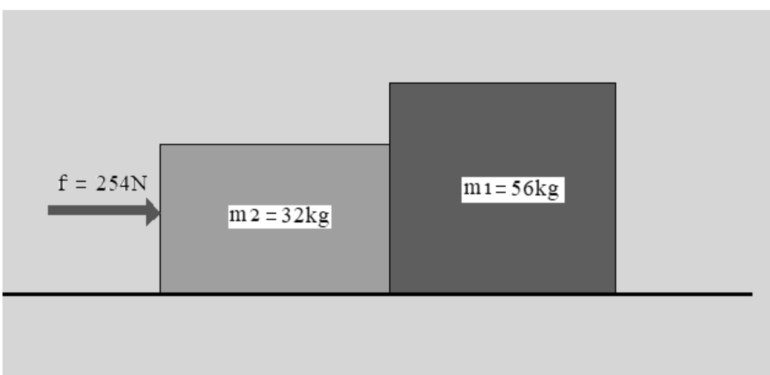


Figura 212. Masas unidas creando un solo sistema de masa. Fuente: elaboración propia

b. Una piedra de masa 25 kg que cae libremente desde una altura de 2,4 m impacta en la cabeza de un clavo que está incrustado en una tabla, la cual reposa en el suelo. ¿Cuál es la fuerza aplicada al clavo por la piedra?
c. Un boxeador le pega un puñetazo a otro en la cara, con una magnitud de fuerza de 82 N. Si el boxeador al que le dieron el puñetazo afirma que él también le propinó al otro un golpe con la misma fuerza, ¿tendrá o no razón este boxeador? Explique.
d. El *pitcher* de un equipo de béisbol lanza la pelota de 150 gr de masa hacia el bateador del equipo contrario, con magnitud de aceleración de 6 m/s^2. Si esta tiene una altura de 2 m y se dirige linealmente en dirección del eje x positivo, determine la fuerza con la que el bate le pega a la pelota si el receptor decide dejarlo en reposo y en dirección de la trayectoria lineal del proyectil.
e. Un estudiante de física y jugador de fútbol afirma que la pelota con la que jugaban fue rechazada de un cabezazo linealmente (eje x positivo) con una magnitud de fuerza de 40 N. Determine la dirección original de la pelota y la fuerza con la que fue golpeada.

4) Problemas de fuerzas centrípeta aplicadas en el movimiento uniforme

a. Determine la fuerza centrípeta ejercida sobre un cuerpo en el tiempo indicado, si su masa es de 0,05 kg y describe un movimiento circular uniforme de radio 1,4 m, y a los siete segundos de su movimiento ha realizado 33,75 vueltas.
b. La magnitud del desplazamiento angular de un cuerpo de masa 0,01 kg es de 420^0 a los diez segundos de su movimiento. Si el radio de la trayectoria circular del cuerpo que describe un movimiento circular uniforme es de 60 cm, ¿cuál es el periodo de su movimiento, ¿cuál es su velocidad tangencial?, ¿cuál es su velocidad angular?, ¿cuál es la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo?
c. Un auto de masa 3500 kg se mueve sobre una pista circular a rapidez constante. Si al cabo de dar dos vueltas completas recorre una distancia de 420 m en un tiempo de 5 s, determine: su rapidez promedio, el radio de la trayectoria y la magnitud de la fuerza centrípeta que lo mantiene en la pista.
d. Un protón que es acelerado en un ciclotrón alcanza en un tiempo de 4 s una rapidez constante equivalente al 12% de la rapidez de la luz. Si el

radio de la trayectoria circular que describe a causa del campo magnético aplicado sobre él, para evitar que escape de esta, es de 0,52 m, calcule: la aceleración centrípeta del protón y la magnitud de la fuerza centrípeta ejercida por el campo magnético sobre el protón.

e. Un atleta se mueve en una pista circular de radio 36 m, con rapidez tangencial constante de 10,4 m/s. Determine el desplazamiento angular del atleta en un tiempo de 4 s, su periodo de movimiento y la fuerza centrípeta que actúa sobre el atleta.

5) Problemas de fuerzas tangencial aplicadas en el movimiento circular uniformemente acelerado

a. La magnitud de la velocidad angular de un cuerpo que describe un movimiento circular uniformemente acelerado aumenta de 44 rad/s a 66 rad/s, en un tiempo de 6 s. Si la masa de este es de 0,02 kg y el valor de su radio de giro es de 0,021 m, calcule la aceleración angular del cuerpo, la magnitud de su desplazamiento angular en t = 6 s, y la fuerza tangencial ejercida sobre el cuerpo.
b. Una pelota de 0,00005 kg de masa se encuentra sobre la superficie de una ruleta rusa a una distancia fija respecto al eje central de rotación de 24 cm. Si la ruleta empieza a girar desde el reposo y a los 3 s de su movimiento presenta una magnitud de velocidad angular de 8 rad/s, determine: la aceleración angular imprimida a la pelota por medio de la ruleta, el valor del ángulo barrido por la pelota en t = 3 s, la fuerza tangencial que actúa sobre la pelota a los 3s de movimiento y la magnitud de su fuerza tangencial.
c. Un electrón es acelerado desde el reposo, con aceleración angular de 2 rad/s^2 en un tiempo t = 2,4 s. Determine su velocidad angular a los 2,4 s, el ángulo girado en este tiempo y la fuerza tangencial aplicada al electrón.
d. El disco de una pulidora de 18 cm de diámetro, al partir del reposo se tarda 8 s en adquirir una rapidez de 340 r.p.m. Calcule la aceleración angular y tangencial del disco y la fuerza tangencial y centrípeta que actúa sobre este.
e. Las aspas de una avioneta de 1,14 m de longitud giran a 220 r.p.m. Si se le aplican los frenos y demoran 18 s en detenerse, calcule la velocidad angular inicial de las aspas, la aceleración angular y tangencial de las aspas, y la fuerza tangencial de frenado.

6) Problemas de equilibrio traslacional de cuerpos

a. Determine en la Fig. 213 las fuerzas $\vec{f}1$ y $\vec{f}2$ que están actuando sobre el tiburón y la magnitud de cada una de estas fuerzas.

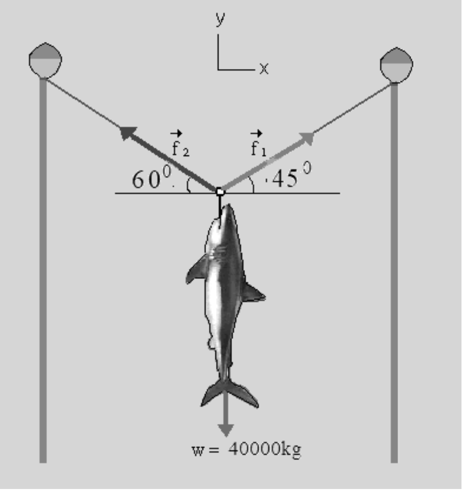


Figura 213. Tiburón colgando de cuerdas atadas a postes. Fuente: elaboración propia

b. Determine la fuerza de tensión $\vec{T}$ que ejerce la soga que se muestra en la Fig. 214 para sostener al hombre de masa m_h = 80,4 kg y a la viga uniforme de masa m = 30 kg, si se sabe que la fuerza normal entre la pared y la viga es de 64 N y el coeficiente de rozamiento estático entre estas superficies es de 0,07.

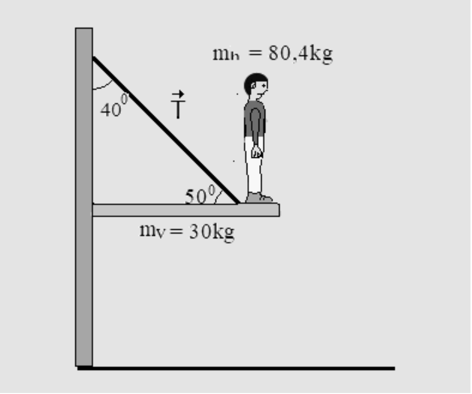


Figura 214. Hombre sostenido por una plataforma atada a una cuerda. Fuente: elaboración propia

c. Determine la fuerza de rozamiento que presenta el piso con el cajón que arrastra el hombre de la Fig. 215 sobre su superficie, si éste le aplica una magnitud de fuerza F = 65,6 N un instante antes de que comience a moverse, así como el coeficiente de rozamiento estático de la superficie.

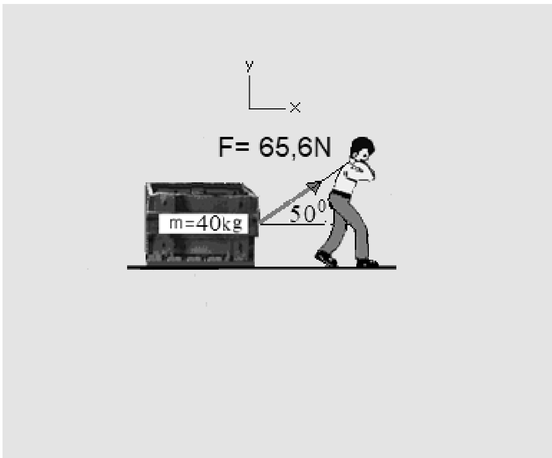


Figura 215. Hombre arrastrando una caja sobre una superficie con rozamiento. Fuente: elaboración propia

d. Determine la fuerza de tensión en cada una de las cuerdas que se muestra en la Fig. 216 y la magnitud de cada una de estas fuerzas.

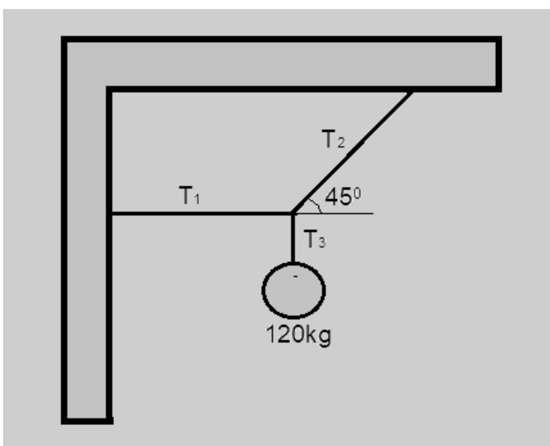


Figura 216. Cuerdas sosteniendo una esfera de masa 120kg. Fuente: elaboración propia

e. Determine la fuerza de tensión en la cuerda y el coeficiente de rozamiento estático de la superficie piramidal que se muestra en la Fig. 217 (el sistema se encuentra en equilibrio traslacional), y la magnitud de la fuerza de tensión.

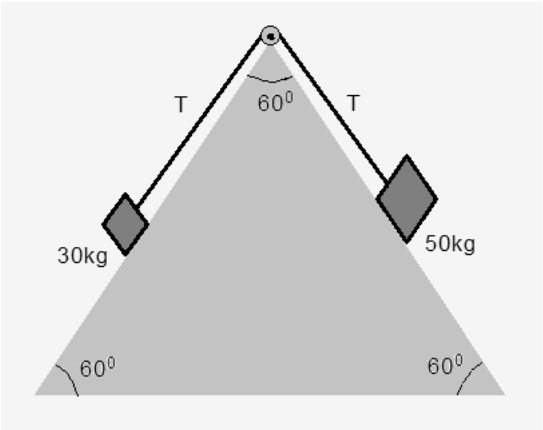


Figura 217. Masas unidas por medio de una cuerda a una polea que se encuentra en todo el pico de la superficie piramidal. Fuente: elaboración propia

7) Problemas de torques

a. Determine el torque que ejerce la fuerza de 40 N sobre la llave inglesa en la Fig. 218 y la magnitud del torque.

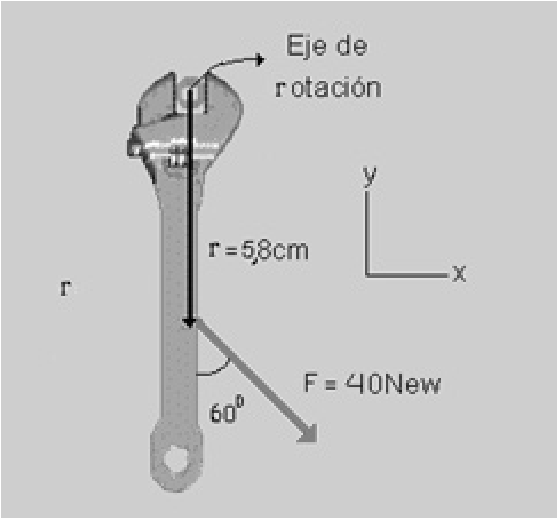


Figura 218. Fuerza ejerciendo un torque sobre una llave inglesa. Fuente: elaboración propia

b. Una barra rotatoria es girada por una persona, la cual le aplica una magnitud de fuerza de 42 N en un punto ubicado a 2 m del eje de rotación. ¿Cuál es el torque y su magnitud, aplicado a la barra si su masa es despreciable? Véase la Fig. 219.

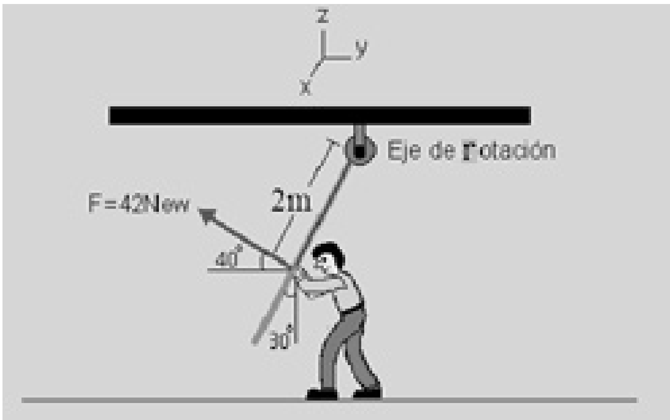


Figura 219. Hombre ejerciendo torque en una barra rotatoria que cuelga del techo. Fuente: elaboración propia

c. Determine en la Fig. 220 la magnitud del torque neto que se ejerce sobre el sube y baja debido al peso de las personas que se encuentran jugando en él. ¿En qué dirección girará el columpio?

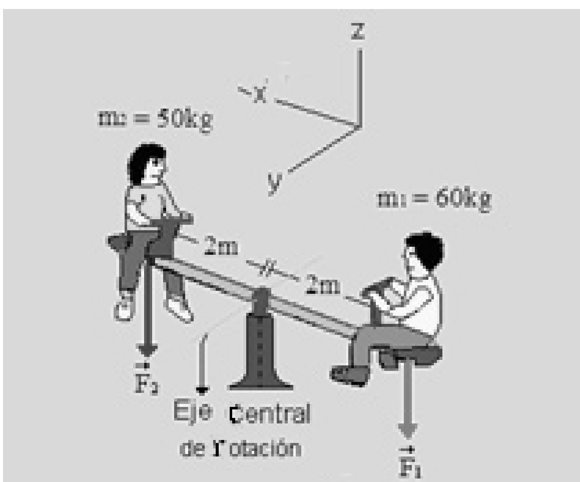


Figura 220. Torques ejercidos por dos personas que se encuentran sobre un sube y baja. Fuente: elaboración propia

d. Determine en la Fig. 221 el torque que ejerce la componente del peso en *y*, del niño que se encuentra en el columpio sobre éste.

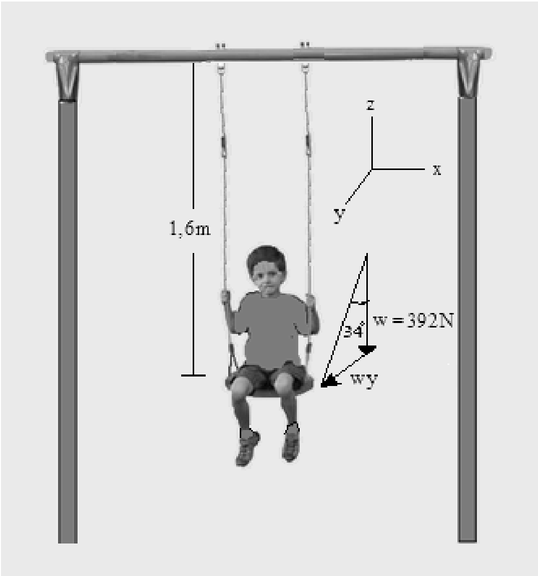


Figura 221.

e. Determine en la Fig. 222 la magnitud del torque ejercido por la persona que abre la puerta ejerciéndole una magnitud de fuerza de 40 N.

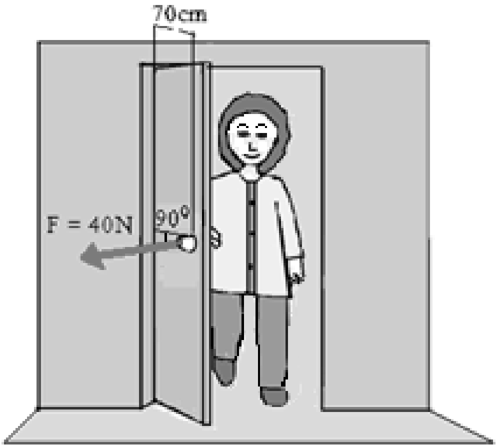


Figura 222. Persona ejerciendo torque sobre una puerta al abrirla. Fuente: elaboración propia

f. Determine en la Fig. 223 el torque resultante ejercido —y su magnitud— sobre el molino por las dos personas que le ejercen fuerzas de 60 N y 40 N, respectivamente.

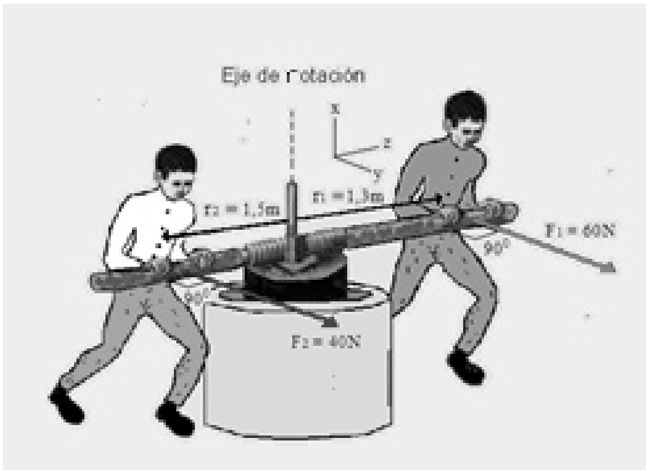


Figura 223. Torque resultante ejercido sobre un molino de caña. Fuente: elaboración propia

g. Determine el torque resultante generado por todas las fuerzas que se ejercen sobre la barra de masa despreciable que se muestra en la Fig. 224.

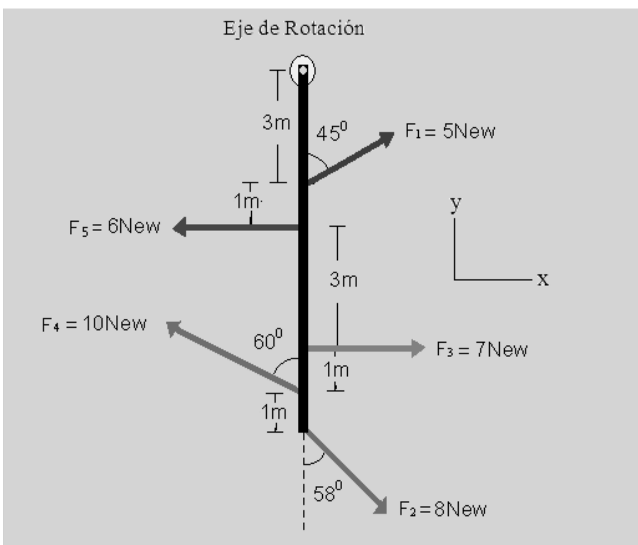


Figura 224. Fuerzas ejerciendo torque sobre una barra rotatoria. Fuente: elaboración propia

h. Determine el torque resultante generado por todas las canastillas alrededor del punto A en la Fig. 225. ¿Cuál es su magnitud?

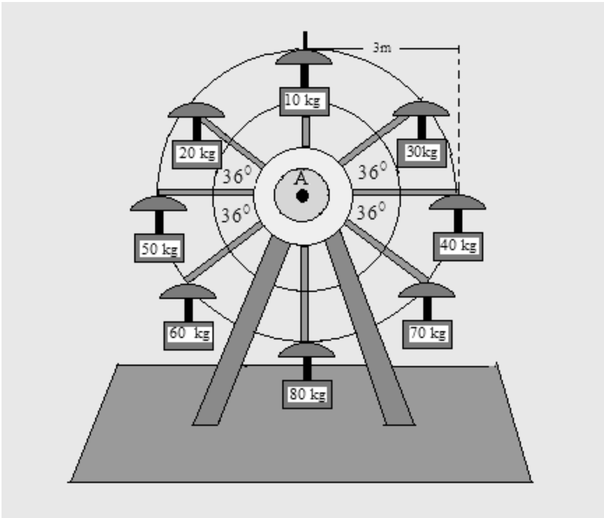


Figura 225. Torques ejercidos por canastillas en un sistema rotatorio.
Fuente: elaboración propia

i. Una viga uniforme de masa 8 kg y de longitud 5 m está soportada en dos bases puntuales. Sobre la viga se encuentra un bloque de masa 50 kg, y un niño de pie de masa 12 kg. Determine la distancia *x* recorrida por el niño, en el preciso instante en el que éste, al dirigirse de izquierda a derecha sobre la viga, ocasiona que la fuerza normal en la primera base deje de existir. Véase la Fig. 226.

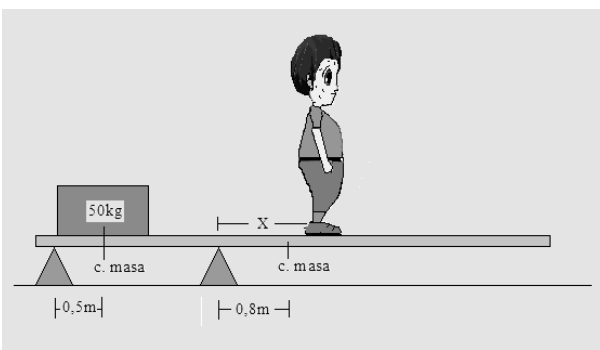


Figura 226. Viga que descansa sobre dos bases y sostiene a un niño y a una masa de 50kg.
Fuente: elaboración propia

j. Un oso pardo de masa 460 kg quiere devorar un panal de miel que posee una masa de 6 kg y se encuentra en el extremo superior de un poste de concreto de longitud uniforme 9 m y de masa 740 kg. Determine la distancia máxima *x* que tiene que recorrer el oso, medida esta desde la parte inferior del poste, un instante antes de que este último gire alrededor de la base puntual en A sobre la que reposa. ¿Cuál sería el torque resultante si el oso lograra ubicarse a 2 m respecto al punto A? Véase la Fig. 227.

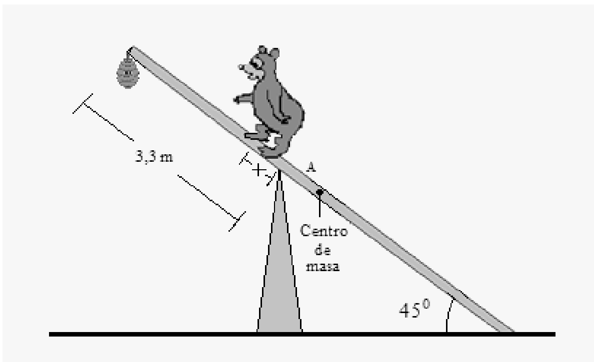


Fig. 227. Oso subiéndose por una viga, donde en uno de sus extremos se encuentra un panel de abejas. Fuente: elaboración propia

Referencias

[1] C. Gutiérrez, “Leyes de Newton”, en *Física general*, J. Rodríguez y L. A. Valdez, Eds. Mexico: McGraw Hill, 2009, pp. 105-124.

[2] D. E. Roller y R. Blum, “Dinámica de partículas”, en *Mecánica, ondas y termodinámica*, J. de la Rubia y J. Aguilar, Eds. Barcelona: Reverté, 1983, pp. 127-153.

[3] R. Serway, “Las leyes del movimiento”, en *Física*, G. Nagore, E. Cruz y J. Brenes, Eds., 4ª ed. México: McGraw Hill, 1997, pp. 106-132.

[4] S. Gartenhaus, “Las leyes de Newton y sus aplicaciones”, en *Física 1 Mecánica*, A. Contin, Ed. México: N. E. Interamericana, 1979, pp. 75-127.

[5] M. Alonso y E. J. Finn, “Dinámica de una partícula”, en *Física Volumen I: mecánica*, C. Hernandez, V. Latorre y J. Herkrath, Eds. Wilmington EE. UU.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986, pp. 156-190.

[6] L. Vargas, “Dinámica”, en *Física fundamental*, G. Solano y J. C. Serna, Eds. Barranquilla, Colombia: Prisma Publicación, 1991, pp. 29-37.

[7] D. C. Giancoli, “Aplicaciones de las leyes de Newton: fricción, movimiento circular y arrastre”, en *Física para ciencias e ingenierías*, R. Fuerte, Ed., 4ª ed. México: Pearson Educación, 2008, pp. 112-129.

[8] F. P. Beer, E. R. Johnston y E. R. Eisenberg, “Estática de partículas”, en *Mecánica vectorial para ingenieros: estática*, R. A. del Bosque y P. E. Roig, Eds., 8ª ed. México: McGraw Hill, 2007, pp. 16-57.

[9] P. A. Tipler, “Aplicaciones de las leyes de Newton”, en *Física*, J. Aguilar y J. de la Rubia, Eds. Barcelona: Reverté, 1977, pp. 127-148.

[10] F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman, “Aplicaciones de las leyes de Newton”, en *Física universitaria*, R. García y J. Lomas, Eds., Vol. I, 11ª ed. México: Pearson Educación, 2004, pp. 153-190.

[11] F. Bueche, “Leyes de Newton”, en *Fundamentos de Física I,* G. Zetina, A. R. Ortiz y R. Barbosa, Eds., 3ª ed., México: McGraw Hill, 1984, pp. 53-78.

[12] P. A. Tipler y G. Mosca, “Leyes de Newton”, en *Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica*, A. Bramón y J. Casas, Eds., 5ª ed. Barcelona: Reverté, 2006, pp. 79-99.

[13] J. D. Wilson, A. J. Buffa, y B. Lou, “Fuerza y movimiento”, en *Física*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds., 6ª ed. México: Pearson Educación, 2007, pp. 103-130.

[14] H. Pérez, “Dinámica”, en *Física general*, 4ª ed., J. Callejas y A. Sámano, Eds. México: Grupo Editorial Patria, 2014, p. p 132-169.

[15] A. M. Sánchez, “Dinámica”, en *Física: guía para el estudiante*, J. E. Villa y E. Parada, Eds. México: Academia Institucional de Física del Instituto Politécnico Nacional, 2010, pp. 117-145.

[16] L. K. Branson, “Dinámica del cuerpo rigido”, en *Mecánica: para estudiantes de ingeniería*, L. Alava, L. C. Díaz y J. Montiel, Eds. Nueva York EE. UU.: Fondo Educativo Interamericano, 1973, pp. 300-319.

[17] J. L. Lorente y A. Rueda, “Fundamentos de la dinámica”, en *Física. Tomo 1*, 4ª ed., C. Suárez, Ed. Madrid: Aguilar, 1999, pp. 99-119.

[18] J. D. Cutnell y K. W. Johnson, “Aplicación de las leyes de movimiento de Newton”, en *Física*, H. Villagomez, Ed., 2ª ed. México: Limusa Wiley, 2004, pp. 115-128.

[19] R. Resnick, D. Halliday y K. S. Krane, “Dinámica de la rotación”, en *Física Vol. 1*, J. Wiley, Ed., 3ª ed. México: Compañía Editorial Continental, 1993, pp. 277-296.

[20] F. W. Sears y M. W Zemansky, “Equilibrio de un cuerpo rígido”, en *Física*, A. Yusta, Ed. Madrid: Aguilar, 1972, pp. 43-57.

[21] W. Hauser, “Movimiento en un campo de fuerzas centrales”, en *Introducción a los principios de mecánica*, C. Ordoñez y S. Alonso, Eds. México: Addison-Wesley, Hispano Americana, 1969, pp. 231-232.

[22] S. M. Lea y J. R. Burke, “Cuerpos rígidos en equilibrio”, en *Física Vol. 1. La naturaleza de las cosas*, M. A. Toledo y R. Garay, Eds. México: International Thomson Editores, 1999, pp. 364-374.

[23] E. Hecht, “Movimiento rotativo”, en *Física 1*. Algebra y trigonometría, M. A. Toledo, P. de la Garza y R. Garay, Eds., 2ª ed. México: International Thomson Editores, 2000, pp. 239-255.

[24] P. G. Hewitt, “Movimiento rotatorio”, en *Física conceptual*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds., 10ª ed. México: Pearson Educación, 2007, pp. 131-139.

Unidad 5

Trabajo, potencia y energía

Resumen

En esta unidad se estudia, sobre todo, la relación íntima que existe entre el observable físico conocido como “trabajo” y la energía. De acuerdo con lo expresado, se tratan los siguientes temas en este apartado: trabajo, trabajo de fuerzas conservativas y disipativas, potencia, energía, energía cinética y energía potencial, energía mecánica, ley de conservación de la energía, conservación de la energía mecánica, teorema del trabajo y la energía.

Palabras clave: energía, fuerzas conservativas, fuerzas disipativas, ley de conservación de la energía, potencia, teorema, trabajo.

A. Introducción

El ser humano, en su interés de avanzar en el conocimiento científico y tecnológico, se ha encontrado con la necesidad de tratar un concepto físico de carácter abstracto y de gran importancia en la física como lo es el concepto de energía. Se afirma que desde su aparición en la Tierra el hombre ha utilizado y transformado la energía. Toda esta experiencia, que ha sido de muchos siglos, además de permitirle entenderla y controlarla —aunque sea de manera parcial—, lo ha llevado alcanzar logros de mucha importancia como lo son la identificación de varios tipos de energía (calorífica, eólica, eléctrica, nuclear, etc.), la creación e implementación de dispositivos de confinamiento, la invención de motores (como, por ejemplo, el de vapor y el de combustión interna) y el establecimiento de conductos de transporte de energía para su aprovechamiento, entre otros. Lo anterior permite reconocer la importancia que tiene en los avances de nuestra sociedad a nivel cultural, científico y tecnológico entender y aplicar el concepto de energía en nuestra vida, de la cual, si bien se encuentra presente en todos los seres vivos e inanimados, al igual que en el medio ambiente, solo se pueden observar sus efectos cuando se transforma de un tipo de energía a otra. Los conceptos de *energía*, *trabajo* y *potencia* están íntimamente relacionados entre sí desde el punto de vista de la ciencia física, así como en las otras ramas del conocimiento.

B. Concepto de trabajo

El concepto de trabajo para la gente del común es muy diferente al que tiene el hombre de ciencia. Para los primeros, el trabajo es cualquier actividad realizada por una persona (manejar, ser recepcionista, ejercer de cobrador de bus, etc.), la cual le permite obtener los recursos para cubrir sus necesidades básicas. Por su parte, para el hombre de ciencia este concepto es mucho más complejo de lo que se cree y se considera. De acuerdo con [1] y [2], para que una persona realice trabajo sobre un cuerpo en particular, el esfuerzo aplicado (la fuerza aplicada por la persona) sobre éste debe causarle un desplazamiento neto diferente de cero a lo largo de la dirección en la que se imprime la fuerza.

Desde el punto de vista matemático, el trabajo —según [2], [4] y [7]— se define a través del producto punto entre el vector fuerza externa ejercida sobre el cuerpo y su vector de desplazamiento, así:

$$W = \vec{F} \circ \vec{D} \tag{192}$$

Donde:

- W: representa el trabajo ejercido sobre el cuerpo debido a la fuerza externa aplicada sobre él.
- $\vec{F}$: representa la fuerza externa imprimida al cuerpo.
- $\vec{D}$: representa el vector de desplazamiento del cuerpo causado por la fuerza externa en la dirección de su aplicación.

Al tener presente la definición del producto punto entre vectores visto en la unidad 2 y de acuerdo con [3], [4] y [7], (192) se puede escribir también de la siguiente manera:

$$W = FDCos\alpha \tag{193}$$

Donde,

- $F{\cdot}cos\alpha$: representa la magnitud de la componente de fuerza en dirección x aplicada al cuerpo, la cual le causa desplazamiento en esta dirección.
- D: representa la magnitud de desplazamiento del cuerpo causado por la componente de fuerza externa aplicada en dirección de su movimiento, es decir, sobre el eje x.
- α: es el ángulo subtendido entre los vectores de fuerza y desplazamiento.

La Fig. 228 ilustra lo expresado en los párrafos anteriores.

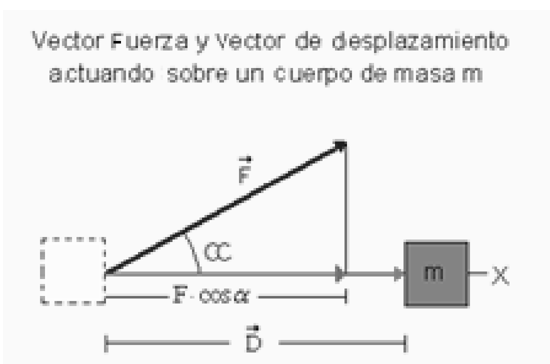


Figura 228. Vector fuerza aplicada a un cuerpo y su vector de desplazamiento en dirección x. Se muestra, además, el ángulo subtendido α entre $\vec{F}$ y $\vec{D}$ y la componente de la fuerza que causa el desplazamiento en la dirección indicada. Fuente: elaboración propia

De (193) y la Fig. 228 se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- Cuando el ángulo subtendido entre el vector de fuerza aplicado al cuerpo y su vector de desplazamiento es igual a noventa grados (α = 90º), esta no realiza trabajo en la dirección de movimiento, ya que el coseno del ángulo de noventa grados es igual a cero (cos90º = 0), por tanto, FDcos90^0 = 0. Véase la Fig. 229.

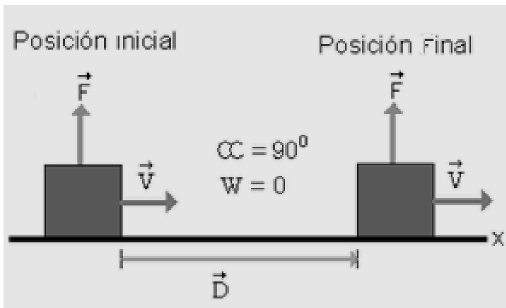


Figura 229. Cuando el valor del ángulo subtendido α entre el vector de fuerza y el vector de desplazamiento de un cuerpo es igual a 90^0, el trabajo realizado por ésta en dirección del movimiento es cero. Fuente: elaboración propia

- Cuando una fuerza aplicada a un cuerpo le causa movimiento y el ángulo subtendido α entre la fuerza y su vector de desplazamiento es igual a cero (α = 0º), se puede decir que esta realiza el máximo trabajo sobre el cuerpo, ya que el coseno de cero grados es igual a uno (cos0º=1); por tanto, FDcos0^0 = FD (*FD* representa el máximo trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre el cuerpo). Véase la Fig. 230.

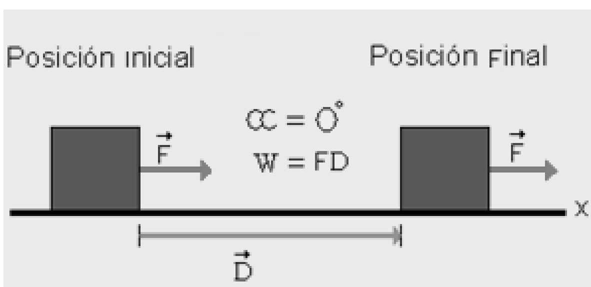


Figura 230. Cuando el ángulo subtendido α entre el vector de fuerza aplicado al cuerpo y su vector de desplazamiento es igual a cero, el trabajo realizado por esta sobre el cuerpo es máximo, es decir, W = FD. Fuente: elaboración propia

- Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo y esta no puede desplazarlo por alguna circunstancia, sobre esté no se realiza trabajo, ya que la magnitud del desplazamiento es cero (D = 0), por tanto, $(F)(0)\cos\alpha = 0$. Véase la Fig. 231.

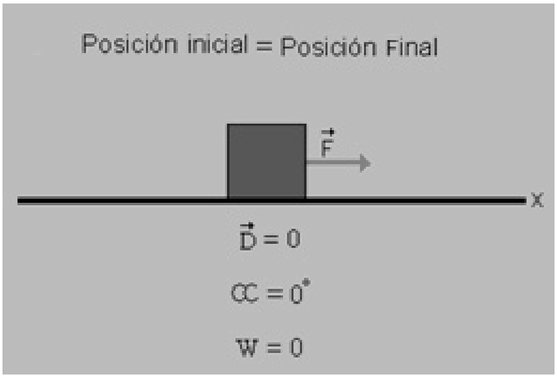


Figura 231. Aunque sobre el cuerpo que se muestra en la figura se le esta aplicando una fuerza $\vec{F}$, sobre él no se realiza trabajo, ya que esté no presenta desplazamiento, es decir, $\vec{D}$.
Fuente: elaboración propia

- Cuando $0^0 < \alpha < 90^0$, únicamente la componente en dirección x de la fuerza $\vec{F}$ aplicada al cuerpo realiza trabajo sobre este, ya que solo esta se encuentra en dirección de su desplazamiento. Esta componente se define de la siguiente manera $\vec{F}_x = \vec{F}\cos\alpha$. Véase la Fig. 232.

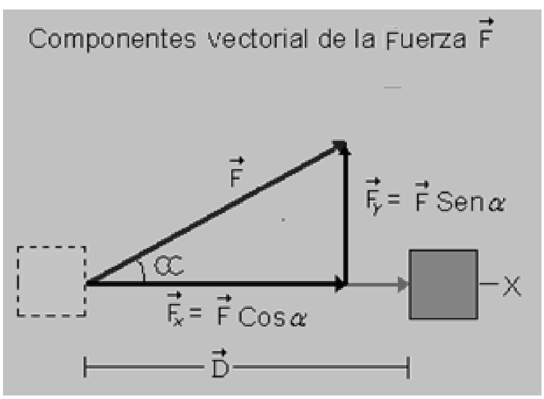


Figura 232. Cuando una fuerza $\vec{F}$ aplicada a un cuerpo forma un ángulo α $(0^0 < \alpha < 90^0)$ con el eje x causándole un desplazamiento, la única componente de la fuerza aplicada que realiza trabajo sobre él es su componente en dirección x, es decir, $\vec{F}_x = \vec{F}\cos\alpha$.
Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [8], el trabajo realizado sobre un cuerpo puede ser positivo o negativo, dependiendo del valor de ángulo formado entre el vector de fuerza aplicada y su vector de desplazamiento en dirección del eje x positivo (véase la Fig. 232). Cuando el ángulo subtendido $\alpha < 90^0$, el trabajo es positivo, y negativo cuando $\alpha > 90^0$. Ahora, de acuerdo con [3], cuando el trabajo realizado por la fuerza es positivo desde el punto de vista de la física, el sistema o cuerpo al cual se le aplica gana una energía equivalente a éste; pero si se da lo contrario, es decir, que el trabajo de la fuerza es negativo, se dice que este es la energía perdida por el sistema. Lo anterior se explica debido a que existe una equivalencia entre trabajo y energía, tema que se analiza más adelante con mayor detalle.

Hasta el momento, solo se ha analizado el problema del trabajo generado por una sola fuerza aplicada a un cuerpo en particular, pero cuando son más de una las fuerzas que se ejercen sobre él y se quiere determinar el trabajo neto realizado por estás, se debe hacer uso del principio de superposición. La utilización de este principio consiste, primero, en hallar el trabajo independiente generado por cada una de las fuerzas que actúan en el cuerpo; luego, el trabajo neto o resultante se consigue al sumar todos los valores individuales de trabajo obtenidos en el primer paso debido a cada una de las fuerzas [5], [7] y [8]. Por tanto, la ecuación general que permite determinar el trabajo neto realizado en un cuerpo sobre el cual actúan varias fuerzas queda expresada de la siguiente manera:

$$W_{Neto} = \sum_{i=1}^{n} w_i = w_1 + w_2 + w_3 \ldots + w_{n-1} + w_n$$

Si se tiene presente (192), la cual define el trabajo realizado por una sola fuerza, se obtiene:

$$W_{Neto} = \vec{F}_1 \circ \vec{D}_1 + \vec{F}_2 \circ \vec{D}_2 + \vec{F}_3 \circ \vec{D}_3 \cdots + \vec{F}_{n-1} \circ \vec{D}_{n-1} + \vec{F}_n \circ \vec{D}_n \qquad (194),$$

Donde:

$$w_1 = \vec{F}_1 \circ \vec{D}_1 \,;\; w_2 = \vec{F}_2 \circ \vec{D}_2 \,;\; w_3 = \vec{F}_3 \circ \vec{D}_3 \,;\; w_{n-1} = \vec{F}_{n-1} \circ \vec{D}_{n-1} \,;\; w_n = \vec{F}_n \circ \vec{D}_n$$

Por ejemplo, en la Fig. 233 se muestra un cuerpo de masa m sobre el cual actúan cuatro fuerzas que le causan un desplazamiento $\vec{D}$.

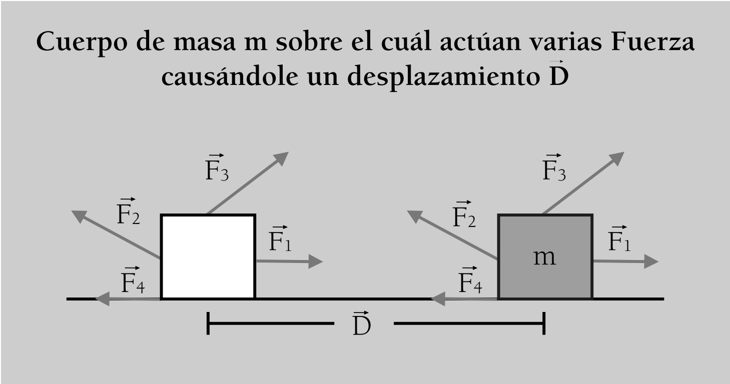


Figura 233. Desplazamiento $\vec{D}$ de un cuerpo de masa *m*, debido a las cuatro fuerzas que se encuentran aplicadas sobre él. Fuente: elaboración propia

Por tanto, el trabajo neto realizado por las fuerzas indicadas en la Fig. 233 sobre el cuerpo de masa *m* está dado por la expresión:

$$W_{Neto} = \vec{F}_1 \circ \vec{D}_1 + \vec{F}_2 \circ \vec{D}_2 + \vec{F}_3 \circ \vec{D}_3 + \vec{F}_4 \circ \vec{D}_4$$

Sin embargo, como $\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3 = \vec{D}$, la ecuación anterior se puede escribir también de la siguiente manera:

$$W_{Neto} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) \circ \vec{D} \tag{195}$$

La expresión anterior se debe a que el vector de desplazamiento $\vec{D}$ es un factor común de cada una de las fuerzas. Además, dado que el desplazamiento del cuerpo de masa *m* va de izquierda a derecha en la Fig. 233, las fuerzas 1 y 3 que actúan sobre él realizan un trabajo positivo, pues el ángulo que forman con su vector de desplazamiento es menor de noventa grados. Cosa contraria ocurre con las fuerzas 2 y 4, las cuales forman ángulos mayores de noventa grados, es decir, el trabajo que estas realizan es negativo. En la Fig. 234 se observa el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas ilustradas en la Fig. 233, así como lo expresado en el párrafo de arriba.

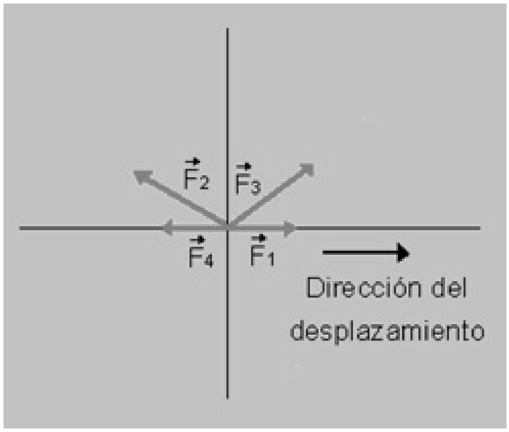


Figura 234. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa *m* ilustradas en la Fig. 233. Fuente: elaboración propia

De acuerdo con [6], [7] y [8], la unidad de trabajo o unidad de energía más común utilizada es el joule, y se define como el producto entre la unidad de fuerza (newton) y la unidad de distancia (metro), es decir, 1 joule = 1 Nm.

Ejemplo 1.

Un hombre empuja un baúl sobre una superficie lisa con una magnitud de fuerza constante y horizontal de 30 N. Si durante dos segundos logra desplazarlo una distancia de 20 m, ¿cuál es el trabajo realizado por el hombre sobre el baúl? Véase la Fig. 235.

Figura 235. Hombre empujando un baúl en la dirección *x* positiva con una magnitud de fuerza de 30 N. Esta última alcanza a desplazarlo una distancia de 20 m en un tiempo de dos segundos. Fuente: elaboración propia

Solución

Del texto del ejercicio se deduce que:

$$F = 30 \text{ N}; D = 20 \text{ m} ; \alpha = 0^0$$

Ahora, al hacer uso de (193), es decir:

$$W = FD\cos\alpha$$

Si se reemplazan los valores anteriores de magnitud de fuerza, distancia recorrida y el valor del ángulo subtendido entre ellos en (193), tenemos que:

$$W = (30 \text{ N})(20 \text{ m})\cos(0^0) = 600 \text{ Nm}$$

Es decir:

$$W = 600 \text{ joule}$$

Ejemplo 2.

En la Fig. 236 se muestra un cuerpo de masa *m* sobre el cual actúan las cuatro fuerzas indicadas. ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre la masa debido a las fuerzas si esta se desplaza una distancia de 10 m hacia la derecha en un tiempo de 3 s? Tenga presente que tanto la dirección como las magnitudes de las fuerzas permanecen constantes.

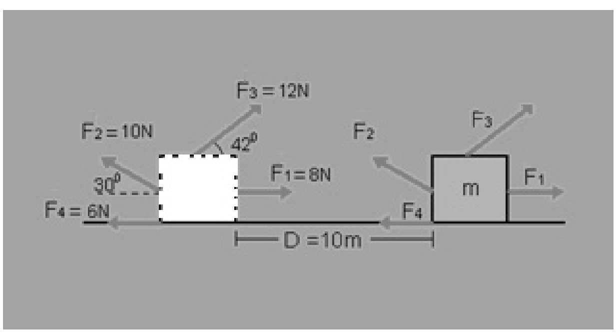


Figura 236. Cuatro fuerzas actuando sobre un cuerpo de masa *m*. La fuerza neta dirigida hacia la derecha logra desplazarlo una distancia de 10 m en un tiempo de tres segundos. Fuente: elaboración propia

Solución

A fin de darle respuesta al ejercicio se hace uso de (194), es decir:

$$W_{Neto} = \vec{F}_1 \circ \vec{D}_1 + \vec{F}_2 \circ \vec{D}_2 + \vec{F}_3 \circ \vec{D}_3 + \vec{F}_4 \circ \vec{D}_4$$

Si se tiene presente la definición de producto punto se deduce que:

$$w_1 = \vec{F}_1 \circ \vec{D}_1 = (8N)(10m)\cos(0^0) = 80 \text{ joule}$$

$$w_2 = \vec{F}_2 \circ \vec{D}_2 = (10N)(10m)\cos(150^0) = -86{,}60 \text{ joule}$$

$$w_3 = \vec{F}_3 \circ \vec{D}_3 = (12N)(10m)\cos(42^0) = 89{,}18 \text{ joule}$$

$$w_4 = \vec{F}_4 \circ \vec{D}_4 = (6N)(10m)\cos(180^0) = -60 \text{ joule}$$

Al reemplazar los valores anteriores, obtenidos de los trabajos individuales generados por cada una de las fuerzas al cuerpo de masa *m* en (194), se obtiene:

$$W_{Neto} = 80\text{joule} - 86{,}60\text{joule} + 89{,}18\text{joule} - 60\text{joule}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas en la ecuación anterior se obtiene, finalmente, el trabajo neto imprimido por las cuatro fuerzas sobre el cuerpo de masa *m*, así:

$$W_{Neto} = 22{,}57\text{joule}$$

1) Trabajo de fuerzas conservativas

Cuando el trabajo realizado por un campo de fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa *m* es igual a la diferencia entre los valores inicial y finales de un tipo de energía llamada “energía potencial”, la cual presenta el cuerpo en dos puntos diferentes del espacio donde se encuentra, se dice que el campo es conservativo. Además, de acuerdo con [9] y [12], cuando la trayectoria seguida por el cuerpo dentro del campo de fuerza es cerrada, lo que implica su retorno a la posición inicial, el trabajo sobre éste debido a las fuerzas debe ser cero. Esto permite entender que el trabajo realizado por un campo de fuerza conservativo sobre un cuerpo no depende de la trayectoria seguida por él para ir de un punto a otro, sino de las posiciones inicial y final que presente en el interior del campo [5].

De acuerdo con [5] y [9], la ecuación matemática escalar que permite determinar el trabajo realizado por un campo de fuerza conservativo está dada por la expresión:

$$W = E_{Pi} - E_{Pf} \tag{196}$$

Donde:

- W: es el trabajo realizado por el campo de fuerza conservativo.
- E_{pi}: es la energía potencial del cuerpo en el punto llamado "posición inicial".
- E_{pf}: es la energía potencial del cuerpo en el punto llamado "posición final".

Con el fin de entender mejor lo expuesto en los párrafos anteriores, en la Fig. 237 se ilustra lo expresado en ellos.

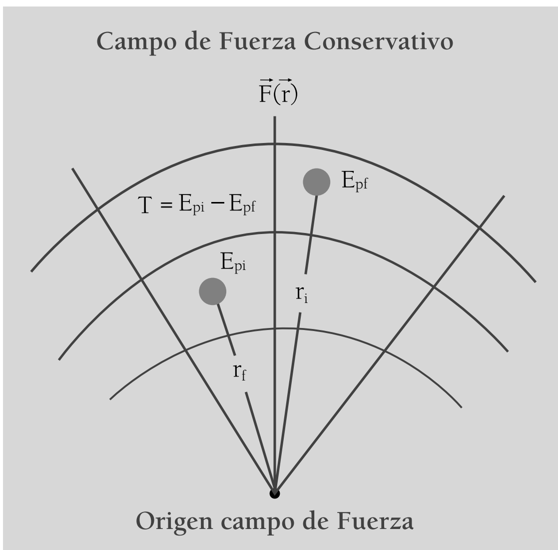


Figura 237. Cuando el campo de fuerzas en el que se encuentra inmerso un cuerpo de masa *m* es conservativo, y esté es desplazado desde un punto inicial *Pi* al punto final *Pf*, el trabajo realizado por la fuerza aplicada para realizar su traslado es igual a la diferencia de las energías potenciales inicial y final que presenta en las correspondientes posiciones, es decir: $W = E_{Pi} - E_{Pf}$. Fuente: elaboración propia

Del concepto de campo de fuerza conservativo tratado en la parte de arriba se pueden sacar algunas propiedades importantes como las que se enuncian a continuación.

- Los campos de fuerzas conservativas, de acuerdo con [9], solo dependen de las coordenadas espaciales, es decir:

$$\vec{F}_r = F_r\hat{r} = f(r)\hat{r} \ ; \ f(r) = f(x, y, z)$$

- El trabajo realizado por un campo de fuerza conservativo sobre un cuerpo de masa *m* es independiente del camino seguido por el cuerpo para ir del punto inicial *Pi* al punto final *Pf*. Esto quiere decir que el trabajo realizado para trasladar el cuerpo por cada una de las trayectorias r_1, r_2 y r_3 es igual. Véase la Fig. 238.

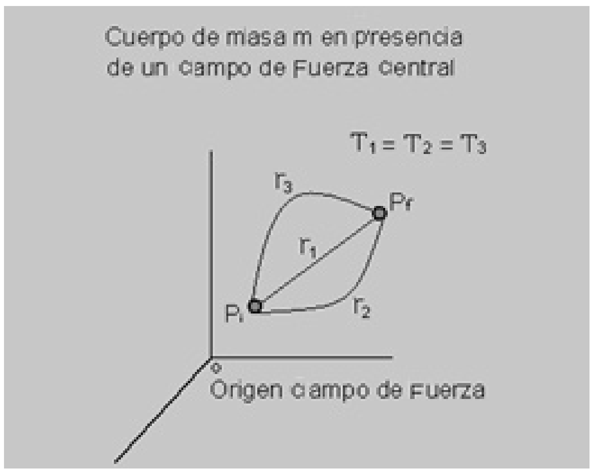


Figura 238. Cuando el campo de fuerzas en el que se encuentra inmerso un cuerpo de masa *m* es conservativo, el trabajo realizado por éste para trasladarlo del punto *Pi* al punto final *Pf* no depende de la trayectoria seguida por el cuerpo. Por tanto, el trabajo realizado por las trayectorias r1, r2 y r3 es igual, es decir, $T_1 = T_2 = T_3$. Fuente: elaboración propia

- El trabajo realizado por un campo de fuerza conservativo sobre un cuerpo inmerso en él de masa *m,* a lo largo de un camino cerrado, es cero. Es decir:

$$W = 0$$

Este resultado se puede entender mejor al tener en cuenta (196), la cual expresa que el trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo está dado por W = Epi - Epf, pero en este caso Epi = Epf, ya que al ser la trayectoria cerrada la posición inicial del cuerpo es igual a su posición final, y, por tanto, sus correspondientes energías potenciales también son iguales, ya que estas últimas dependen es de la posición como se había expresado. Por todo lo anterior se puede concluir que W = 0. En la Fig. 239 se ilustra lo enunciado.

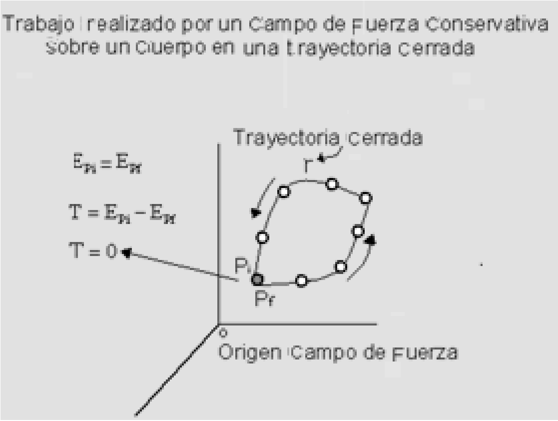


Figura 239. Cuando el campo de fuerza en el que se encuentra inmerso un cuerpo de masa *m* es conservativo, el trabajo realizado por el campo sobre éste en una trayectoria cerrada es igual a cero. Lo anterior se debe a que la energía potencial inicial y final del cuerpo son iguales, es decir: T= Epi – Epf = 0. Fuente: elaboración propia

El campo de fuerza gravitacional de la Tierra, los campos de fuerzas elásticos y los campos de fuerzas electromagnéticos son ejemplos de campos conservativos.

Ejemplo 3.

Determine el trabajo neto realizado por la fuerza de gravedad sobre un cuerpo de masa 8,2 kg cuando éste es elevado verticalmente una altura de 3,5 m con respecto a la superficie de la Tierra. Véase la Fig. 240.

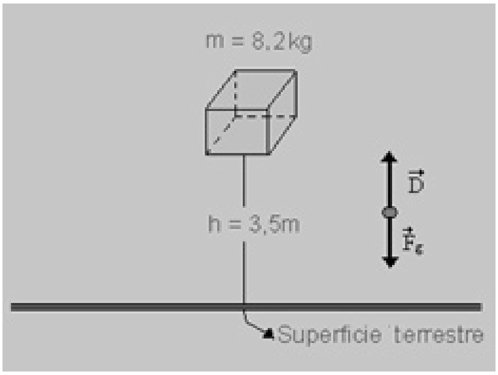


Figura 240. Cuerpo de masa 8,2 kg elevado verticalmente una distancia de 3,5 m respecto a la superficie de la Tierra. Mientras que el desplazamiento del cuerpo está dirigido hacia arriba, la fuerza de gravedad está orientada hacia abajo. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para dar respuesta a la pregunta se hace uso de (193), es decir:

$$W = FD\cos\alpha$$

Donde:

$$F = mg = (8,2kg)(9,8m/s^2) = 80,36New \ ; \ D = 3,5m \ ; \ \alpha = 180^0$$

Al reemplazar los valores anteriores en (193) tenemos:

$$W = (80,36\ N)(3,5\ m)\cos(180^0) = -281,26\ joule$$

Como se puede observar, el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es negativo. Esto se debe a que su dirección va en sentido contrario al desplazamiento, tal como se observa en la Fig. 240. Desde el punto de vista físico esto quiere decir que existe una pérdida de energía por parte del agente externo que levanta al cuerpo, la cual es ganada por este último.

Ejemplo 4.

Determine el trabajo realizado por un resorte sobre una masa de 2,4 kg cuando este es estirado hacia la derecha una distancia de 20,8 m y presenta una constante de elasticidad k = 0,8 N/m. Véase la Fig. 241.

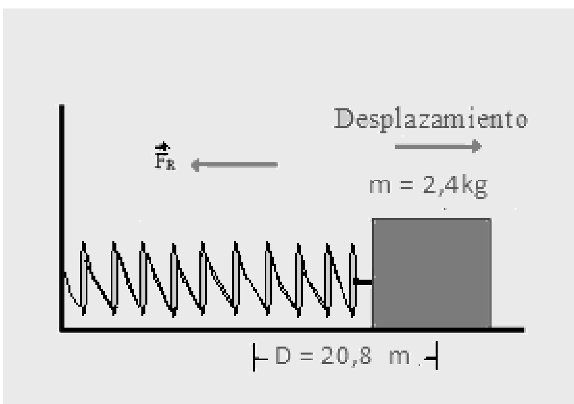


Figura 241. Cuerpo de masa 2,4 kg unido a un resorte de constante de elasticidad 0,8 N/m, el cual se estira una distancia de 20,8 m en la dirección *x* positiva. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para darle respuesta a la pregunta se hace uso de (193), es decir:

$$W = FD\cos\alpha$$

Donde:

$$F = kX = (0{,}8N/m)(20{,}8m) = 16{,}64New \; ; \; D = 20{,}8m \; ; \; \alpha = 180^0$$

Al reemplazar los valores anteriores en (193) tenemos que:

$$W = (16{,}64N)(20{,}8m)\cos(180^0) = -346{,}11 \; joule$$

Es decir, el trabajo realizado por el resorte sobre la masa adherida a él es de W= -346,11 joule. El signo negativo se debe a que la fuerza ejercida por el resorte apunta en sentido contrario al desplazamiento del cuerpo, de manera que forma entre los dos un ángulo mayor de 90º. En este caso es de 180º, tal como se muestra Fig. 241. Se puede también concluir de esto que el resorte le ha cedido una energía de 346,11 joule al cuerpo adherido a él.

2) Trabajo de fuerzas disipativas

Antes de entrar en detalle en torno al trabajo realizado por las fuerzas disipativas se proporciona una definición previa de este tipo de fuerzas. Así, de acuerdo con [9], las fuerzas disipativas son aquellas fuerzas de rozamiento que se dan entre dos o más cuerpos en contacto directo y que, además, por lo regular, presentan un movimiento relativo entre ellos. Este tipo de fuerzas dependen de la velocidad, no de la posición, y, por lo general, van dirigidas en sentido contrario al movimiento del cuerpo. Según [12], si las fuerzas son disipativas no se les puede definir una energía potencial, es decir, que si se mide el trabajo realizado por estas en una trayectoria cerrada este nunca dará cero.

Particularmente en este texto se tratan problemas de dos cuerpos que se encuentran uno en movimiento y el otro en reposo, los cuales, al rozar sus superficies, generan fuerzas de fricción que cambian la inercia del cuerpo que se mueve al disminuirle su velocidad, induciéndole esto último una perdida en su energía cinética. Según [11], esta energía perdida por el cuerpo a causa del trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento se transforma y disipa en el medio en forma de calor, de modo que se genera siempre una ganancia en energía térmica.

Al tener presente lo expresado en el párrafo anterior, así como en (192), la cual permite determinar el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo, se puede concluir que la ecuación matemática que representa el trabajo hecho por las fuerzas disipativas, como, por ejemplo, las de rozamiento, está dada por la siguiente expresión:

$$W_d = \vec{F}_r \circ \vec{D}$$

Donde:

- W_d: representa el trabajo hecho por la fuerza disipativa (fuerza de rozamiento).
- $\vec{F}_r$: representa la fuerza disipativa de rozamiento existente entre las superficies en contacto, la cual está dirigida en sentido contrario al desplazamiento.
- $\vec{D}$: representa el vector de desplazamiento del cuerpo en movimiento.

De (173) de la unidad 4 se sabe que la magnitud de la fuerza de rozamiento cinética o disipativa está definida como $F_r = \mu_c N$, por tanto, la ecuación que representa el trabajo de este tipo de fuerzas queda expresada de la siguiente manera:

$$W_d = \mu_C (NDcos180^0) = -\mu_C ND \tag{197}$$

Donde, como se había expresado en párrafos anteriores:

- μ_c: es el coeficiente de rozamiento cinético.
- N: es la fuerza normal ejercida en el cuerpo por la superficie rústica sobre la cual se mueve.
- D: es la magnitud del vector de desplazamiento del cuerpo sobre la superficie.

Así, (197) permite determinar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento o la energía cinética perdida por un cuerpo que se desplaza sobre una superficie con fricción. El signo menos presente en ésta se debe a que la fuerza disipativa siempre va dirigida en sentido contrario al desplazamiento del móvil.

Con el fin de que el lector adquiera un mejor entendimiento de lo expresado en la parte de arriba, en la Fig. 242 se observa un cuerpo de masa *m* que se deja caer desde el punto A con rapidez inicial V_0 igual a cero. Éste se desliza a través de la superficie curva sin rozamiento y aumenta gradualmente su rapidez hasta alcanzar en el punto B —que se encuentra en su base— el valor V_1, el cual se mantiene constante hasta el punto C. Luego entra a la región rústica donde hay fricción y ésta le ejerce una fuerza de rozamiento que se opone a su movimiento, causándole una disminución en su rapidez y, por tanto, una pérdida de energía cinética. Después el cuerpo sale de esta región en el punto D con rapidez constante V_2 —la cual es mucho menor que el valor obtenido en el punto anterior C— prolongándose hasta el punto E. Finalmente, la masa *m* comienza a subir la curva en este último punto y disminuye su rapidez paulatinamente hasta alcanzar en el punto *F* el valor $V_3 = 0$.

Se puede observar además en la Fig. 242 que la masa *m* no alcanza en el punto *F* la misma altura *h1* desde la cual se dejó caer en el punto A. Ésta solo llega en este punto a tomar la altura *h2*, la cual es menor que la inicial, es decir, h2 < h1. Esto último se debe a la pérdida de energía cinética sufrida por el cuerpo al pasar por la región de fricción, la cual le causó una disminución en su rapidez.

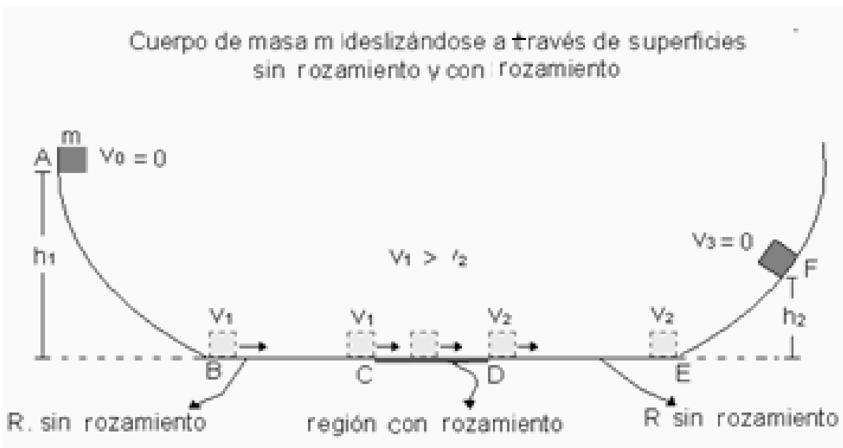


Figura 242. La masa *m* se deja deslizar libremente desde el punto A a través de la superficie curva. Desde este primer punto comienza a aumentar su rapidez paulatinamente hasta llegar a la base en el punto B, donde presenta una rapidez V1, la cual mantiene hasta el punto C. Luego entra a la región donde existe rozamiento y, por causa de la fuerza de fricción, esta pierde rapidez y, por tanto, energía cinética. Después sale de la región con rozamiento con una rapidez V2 menor que V1, y la sostiene hasta el punto E. Seguido a este punto comienza a subir la superficie curva que queda al lado derecho de la trayectoria que está recorriendo, desde la cual comienza a perder velocidad hasta que llega al punto *F* donde se detiene totalmente a causa de una de las componentes de la fuerza de gravedad que está actuando sobre ella en sentido contrario a su movimiento, es decir, V3 = 0. La pérdida de energía cinética de la masa *m* en la zona rústica donde hay rozamiento causa que la altura *h1* sea mucho mayor que la altura *h2*, es decir, h1 > h2. Fuente: elaboración propia

Nota: si el campo de fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa *m* en la Fig. 242 fuera conservativo, la altura inicial *A* y la final *F* del cuerpo serían iguales.

Ejemplo 5.

Una caja de masa 14 kg es trasladada a velocidad constante por un hombre sobre una superficie rústica de coeficiente de rozamiento cinético μ_c = 0,2. Si éste le imprime una fuerza horizontal constante de 40,5 N y logra así durante seis segundos desplazarla una distancia de 12 m, a) ¿cuál es el trabajo realizado por el hombre sobre la caja?, b) ¿cuánta energía es disipada por la fuerza de rozamiento de la superficie?, ¿cuál es el valor de la energía neta de la caja? Véase la Fig. 243.

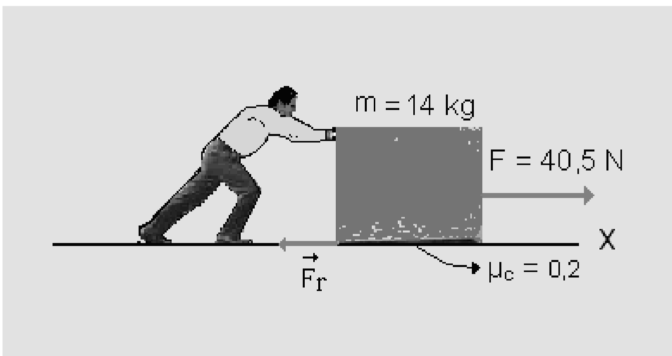


Figura 243. Hombre traslada una caja de 14 kg de masa sobre una superficie rústica de coeficiente de rozamiento cinético μc = 0,2. Éste le aplica a la caja una magnitud de fuerza de 40,5 N a fin de mantener constante su rapidez. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Al hacer uso de (193) y si se tiene presente que F = 40,5 N, D = 12 m, y α=0º, se obtiene:

$$W_H = (40{,}5N)(12m)\text{Cos}0^0 = 486 \text{ joule}$$

b) Si se utiliza (197), es decir:

$$W_d = \mu_C ND$$

Donde:

$$\mu_C = 0{,}2 \ ; \ N = mg = (14kg)(9{,}8m/s^2) = 137{,}2New \ ; \ D = 12m$$

Por tanto, al reemplazar estos valores en (197) se obtiene:

$$W_d = -\mu_C ND = -(0,2)(137,2N)(12m) = -329,28joule$$

Es decir, la energía disipada por la fuerza de rozamiento de la superficie rústica es de:

$$W_d = -329,28joule$$

Como se puede observar esta energía es negativa debido a que la fuerza de rozamiento va en sentido contrario al desplazamiento, formándose entre ellos un ángulo de 180º. Desde el punto de vista de la física, este signo negativo representa una pérdida de energía por parte del cuerpo.

c) La energía neta ganada Eneta de la caja es la diferencia entre el trabajo realizado por el joven sobre la caja y la energía disipada por la superficie rústica, es decir, $E_{neta} = T_H - T_d$ por tanto, tenemos que:

$$E_{neta} = (486 - 329,28) \text{ joule} = 156,72 \text{ joule}$$

Ejemplo 6.

Una masa de 10 kg se deja caer desde el reposo a través de una superficie inclinada, la cual tiene tramos lisos y rústicos, tal como se muestra en la Fig. 244. Si el cuerpo presenta en la parte más alta de la superficie una energía potencial de 235,2 joule, a) ¿cuánta energía pierde el cuerpo cuando pasa por la parte rústica de la superficie si $\mu_C = 0,4$, b) ¿Con qué energía llega el cuerpo al piso?

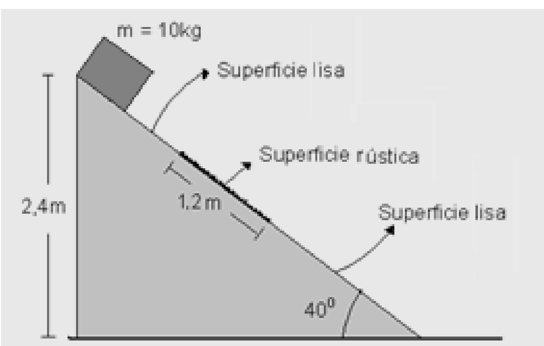


Figura 244. Cuerpo de masa 10 kg que se deja deslizar de la parte más alta de una superficie inclinada desde el reposo. Esta superficie presenta tanto tramos lisos como rústicos. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Al hacer uso de (197), la cual permite determinar el trabajo o la energía disipada por las fuerzas de rozamiento, es decir:

$$W_d = -\mu_C ND$$

Con:

μ_C = 0,4 ; N = mgCos40^0 = (10kg)(9,8m/s^2)(0,76) = 75,07New ; D = 1,2m

Si se reemplazan los valores anteriores en (197) tenemos:

$$W_d = -(0{,}4)(75{,}07N)(1{,}2m) = -36{,}03 joule$$

Es decir, la energía perdida por el cuerpo debido a la fuerza de rozamiento presentada en el tramo rústico de la superficie inclinada es de:

$$W_d = -36{,}03 joule$$

b) La energía neta E_n con la que llega el cuerpo al piso se halla restándole a la energía que tenía este en la parte superior de la superficie antes de dejarse deslizar, la energía disipada por las fuerzas de rozamiento, es decir:

$$E_n = (235{,}2 - 36{,}03) \text{ joule} = 199{,}17 \text{ joule}$$

Por tanto, la energía con la que llega el cuerpo al piso es de 199,17 joule.

C. Concepto de potencia

Así como el concepto de trabajo (energía) visto en los párrafos anteriores tiene importancia en física mecánica, también el concepto de potencia es de mucha relevancia en este campo de conocimiento. Se encuentra, además, que estos dos observables físicos están íntimamente relacionados, de tal manera que la potencia *P* se define como la razón entre el trabajo y el tiempo en el cual este se realiza, es decir, ésta última se reconoce como la energía por unidad de tiempo. En [10], [11] y [12] se encuentra definida la potencia como la rapidez con la que se realiza el trabajo en la unidad de tiempo.

Dentro del concepto de potencia encontramos la potencia media y la potencia instantánea. De acuerdo con [10], la primera se encuentra definida desde el punto de vista matemático de la siguiente manera:

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{198}$$

Donde:

- P_{media}: representa la potencia media, es decir, la energía promedio por unidad de tiempo.
- ΔW: representa el trabajo medio o la energía imprimida en el intervalo de tiempo Δt.
- Δt: es el intervalo de tiempo empleado en realizar el trabajo medio ΔW o en aplicar su energía equivalente.

La potencia instantánea se define, de acuerdo también con [10], de la siguiente manera:

$$P_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \tag{199}$$

Se pueden obtener otras ecuaciones para determinar la potencia media y la potencia instantánea si se tiene presente la ecuación de trabajo (192), en (198), así:

$$P_{media} = \frac{\vec{F} \circ \Delta\vec{D}}{\Delta t} = \vec{F} \circ \frac{\Delta\vec{D}}{\Delta t} = \vec{F} \circ \vec{V}_{med} \,(\text{recuerde}\, \frac{\Delta\vec{D}}{\Delta t} = \vec{V}_{med}) \tag{200}$$

Según [12], (200) permite determinar la potencia media del cuerpo cuando este mantiene una velocidad constante $\vec{V}_{med}$.

La potencia instantánea se determina al aplicar el límite, cuando $\Delta t \to 0$, a (200), de modo que queda esta de la siguiente manera [12]:

$$P_{inst} = \vec{F} \circ \vec{V}_{inst} \tag{201}$$

De (198) y (201) se puede deducir que la unidad de potencia es el joule sobre segundo (J/s), o watts (w), es decir, 1 J/s = 1 w. Cuando se realiza un trabajo equivalente a un joule en un tiempo t = 1 s se concluye que la potencia es de 1 watts.

Ejemplo 7.

El estudio de un motor a gasolina arroja que éste puede realizar un trabajo de 160 000 joule en cinco segundos. ¿Cuál es la potencia mecánica media del motor?

Solución

Mediante (198), la cual permite determinar la potencia media, es decir:

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Con:

$$\Delta W = 160\,000 \text{joule}; \Delta t = 5 \text{ s}$$

Al reemplazar estos valores en (198) tenemos que:

$$P_{media} = \frac{160000J}{5s} = 32000w$$

Ejemplo 8.

Cierto motor eléctrico puede elevar de forma vertical una carga de $300x10^2$ N de peso a una altura de 40 m en doce segundos. Determine la potencia mecánica media del motor.

Solución

Mediante (198), es decir:

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Con:

$$W = FDcos\alpha = (300x10^2\ N)(40m)cos0^o = 12x10^5\ joule;\ t = 12\ s$$

Al reemplazar los valores anteriores en (198) tenemos que:

$$P_{media} = \frac{12x10^5 J}{12s} = 1x10^5 w$$

D. Concepto de energía

Como es de conocimiento, todo sistema dinámico cerrado contiene energía. Esta última se encuentra asociada al estado que presenta el sistema en el momento, en el cual depende de varias propiedades físico-químicas como lo son: la masa, la temperatura, la composición química, la estructura de la materia, la altura, la velocidad, etc. También se encuentra que cuando un cuerpo (sistema) es elevado respecto a la superficie terrestre, inmediatamente después de soltarse libremente adquiere la capacidad de realizar trabajo sobre otros cuerpos que se encuentren en su trayectoria de caída. Lo anterior se debe a la fuerza de empuje que es posible imprimirle al chocar directamente con ellos, con lo cual logra desplazarlos de sus posiciones iniciales. Observamos, además, que una batería cargada eléctricamente puede, de forma indirecta, realizar trabajo sobre un auto al accionar su motor y, con esto, generarle movimiento a sus ejes centrales, los cuales, al estar conectados a las llantas del carro, les trasmiten movimiento. Después, las ruedas en movimiento y en contacto directo con la tierra generan fuerzas de rozamiento que realizan el trabajo sobre el automóvil al causarle desplazamiento en determinada dirección.

También podemos observar que un resorte, al ser estirado o comprimido hasta cierto punto, adquiere con ello la capacidad de realizar trabajo sobre otros cuerpos después de soltarse y lograr que se desplacen de un punto a otro. Ahora, si se realiza un análisis detallado en los casos citados anteriormente de cuerpo elevado, batería y resorte, observamos que en cada uno de ellos se presenta un agente externo que los induce a un estado en el cual estos pueden realizar trabajo, es decir, éste les deja algo que posteriormente les permitirá realizar trabajo sobre otros cuerpos. Ese algo que deja el agente externo al sistema, de acuerdo con [11] y [13], que le da la capacidad de realizar trabajo, es lo que se conoce como "energía".

De lo expresado en el párrafo anterior se puede concluir que la energía se define como la capacidad que presenta un cuerpo para realizar trabajo debido al estado en el que éste se encuentra. Por tanto, la energía y el trabajo tienen la misma unidad de medida conocida como "joules" en honor al físico británico James Prescott Joule, quien realizó, además, varios e importantes estudios en otras áreas de la física, como, por ejemplo, en la termodinámica, con los cuales logró determinar que el calor y la energía son dos cosas de una misma naturaleza.

1) Tipos de energía

Según [14], los tipos de energía más comunes y conocidos son: la energía mecánica, la eléctrica, la lumínica o radiante, la calórica, la sonora, la nuclear, la química, la hidráulica y eólica, entre otras. La energía se puede transformar de un tipo de energía a otra, como, por ejemplo, en una hidroeléctrica se aprovecha la energía mecánica del agua para mover unas turbinas con las que se obtiene energía eléctrica, la cual se envía a nuestros hogares, donde la convertimos en energía lumínica cuando encendemos el foco de nuestra habitación. También la energía puede transferirse de un cuerpo a otro. Así, por ejemplo, cuando un futbolista realiza un tiro libre, el movimiento de su pie puede transferirle energía a la pelota al ponerla en movimiento de modo que queda este en reposo, es decir, el pie, que inicialmente estaba en movimiento, lo vemos en reposo, y la pelota que estaba en reposo se encuentra ahora en movimiento. En este último y sencillo ejemplo se dice inicialmente que el pie tiene energía cinética debido a su movimiento, mientras que la pelota que está en reposo no presenta este tipo de energía. Después de que el pie impacta la pelota, su energía cinética es transferida a esta causándole un desplazamiento. Particularmente en este texto se tratan únicamente las energías cinética, potencial y mecánica.

a) Concepto de energía cinética

Según [13] y [14], la energía cinética es la que posee un cuerpo a causa de su movimiento, es decir, debido a su rapidez. Por esto se le conoce como "energía de movimiento". Este tipo de energía se divide en energía cinética traslacional y energía cinética rotacional. La primera de ellas se presenta en el cuerpo cuando este se mueve en línea recta, y la segunda cuando éste rota alrededor de un eje que pase por su centro de masa.

De la definición de energía cinética se deduce que si un objeto en particular se encuentra en reposo (rapidez = 0) el valor de su energía cinética es cero. La ecuación matemática escalar, de acuerdo con [14], que le define la energía cinética traslacional a un cuerpo en movimiento se expresa de la siguiente manera:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{202}$$

Donde:

- E_c = representa la energía cinética del cuerpo.
- V = representa la rapidez del cuerpo que viaja en línea recta.
- m = representa la masa del cuerpo.

Así, (202) indica que la energía cinética de un cuerpo depende tanto del valor de su rapidez como de su masa. Por ejemplo, la Fig. 245 muestra un automóvil que presenta una energía cinética debido a su velocidad $\vec{V}$.

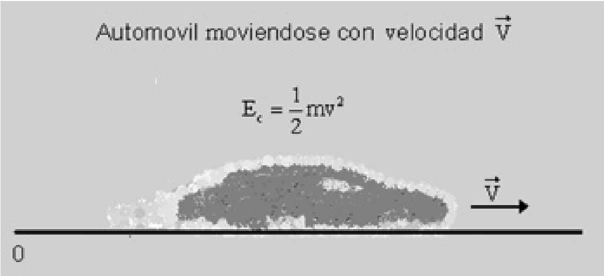


Figura 245. Un automóvil se mueve con una velocidad $\vec{V}$ en una carretera recta. Debido a esta velocidad presenta una energía cinética EC. Fuente: elaboración propia

La ecuación matemática que le define la energía cinética de rotación Ecr al móvil, de acuerdo con [16], está dada por la expresión:

$$E_{cr} = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{203}$$

Donde:

- Ecr: representa la energía cinética de rotación del cuerpo.
- *I*: representa el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje dado de rotación.
- ω: representa la velocidad angular de rotación del cuerpo.

Ejemplo 9.

Un jugador de béisbol lanza una pelota de masa 20 gr a su compañero de equipo con una rapidez constante de10 m/s. Calcule la energía cinética transferida a la pelota por el jugador.

Solución

Mediante (202), es decir:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde:

$$m = 20gr = 0{,}020kg \;;\; v = 10m/s$$

Si se reemplazan los valores anteriores en (202) tenemos que:

$$E_c = \frac{1}{2}\,mV^2 = \frac{1}{2}(0{,}020\ kg)(10m/s)^2 = 1\ kg\ m^2/s^2$$

Es decir, la energía cinética traslacional transferida a la pelota por el jugador es de:

$$E_c = 1\ \text{joule [recuerde 1joule} = 1\ kgm^2/s^2]$$

Ejemplo 10.

Una flecha de masa 0,1 kg es disparada hacia una manzana de 0,3 kg de masa que se encuentra en reposo. Si después del impacto el conjunto manzana flecha se mueve con rapidez constante de 2 m/s, ¿cuál es la energía cinética del conjunto? Véase la Fig. 246.

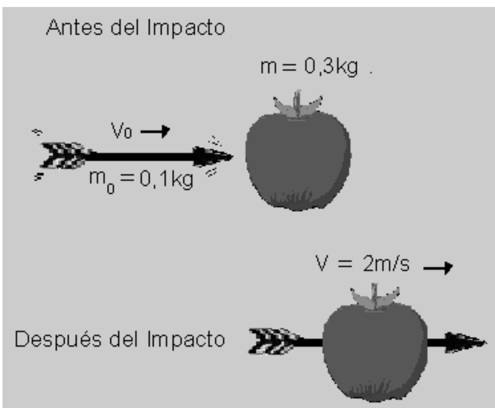


Figura 246. Flecha disparada con rapidez constante v0 hacia una manzana en reposo. Esta, al impactar la manzana un instante después, crea en conjunto con ella un solo sistema que se mueve a rapidez continua de 2 m/s. Fuente: elaboración propia

Solución

Mediante (202), es decir:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde:

$$m_T = m_0 + m = 0{,}1 \text{ kg} + 0{,}3 \text{ kg} = 0{,}4 \text{ kg}; \; v = 2 \text{ m/s}$$

Al reemplazar los valores anteriores en (202) tenemos que:

$$E_c = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2}(0{,}4 \text{ kg})(2\text{m/s})^2 = 0{,}8 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

Es decir, la energía cinética del conjunto manzana flecha es de:

$$E_c = 0{,}8 \text{ joule}$$

b) Concepto de energía potencial

De acuerdo con [15] y [19], la energía potencial es una causa de las fuerzas conservativas, las cuales son las directamente implicadas en la configuración de un sistema en particular, gracias a que las partes (cuerpos) que lo componen están a través de ellas en interacción permanente, lo que da como resultado la aparición de este tipo de energía almacenada en el sistema. Lo anterior nos lleva a concluir que la energía potencial es la que presenta un cuerpo o varios sistemas de cuerpos debido a la posición relativa que presenten respecto al origen o centro de un campo de fuerza en particular. De acuerdo con la naturaleza del campo de fuerzas, la energía potencial se divide en energía potencial eléctrica, potencial elástico y potencial gravitacional, etc.

A continuación, se definen los tres tipos de energía potencial citados. Sin embargo, en este texto solo se tratan el segundo y tercer tipo de energía potencial.

La energía potencial eléctrica es la que tiene una carga de prueba qo, en particular cuando esta se encuentra en una región del espacio donde existe un campo de fuerza de tipo eléctrico, el cual se crea debido a la presencia de una segunda carga que genera un campo eléctrico en el lugar. La ecuación matemática escalar que define la energía potencial eléctrica está dada por la expresión:

$$E_{P.Elect.} = U_{Elect} = k\,\frac{qq_0}{r} \tag{204}$$

Donde:

- U_{Elect}: representa la energía potencial eléctrica de la carga q_0.
- K: representa la constante de Coulomb.
- q: es la carga que crea el campo eléctrico en la región donde se encuentra la carga q_0.
- q_0: es la carga de prueba a la cual se le mide la energía potencial eléctrica.
- r: representa la distancia a la que se encuentra la carga q_0 respecto al origen del campo central de fuerza eléctrica, el cual, por lo general, se considera que está en el punto donde se ubica la carga puntual *q* que lo genera.

En la Fig. 247 se muestra una carga de prueba q_0 que presenta una energía potencial eléctrica debido al campo eléctrico generado por la carga *q*.

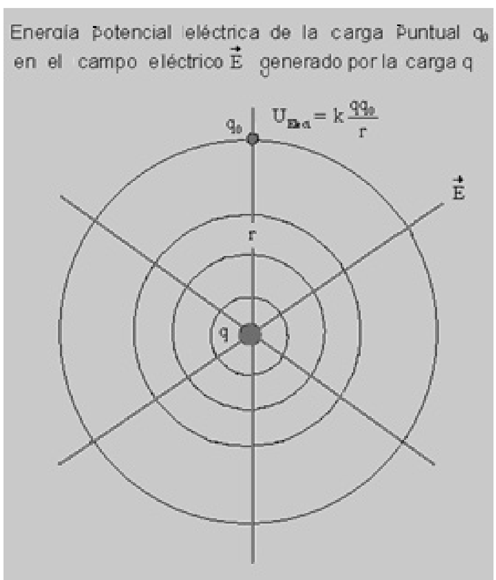


Figura 247. Energía potencial eléctrica presentada por la carga q_0 debido al campo eléctrico generado por la carga *q*. El campo eléctrico le aplica a la carga de prueba una fuerza de tipo eléctrica. Fuente: elaboración propia

La energía potencial elástica es la que presenta un cuerpo de masa *m* cuando se encuentra adherido a un segundo cuerpo de tipo elástico, y en el cual los dos conforman el llamado "sistema". De acuerdo con [16], esta energía potencial almacenada en el primer cuerpo se debe al estiramiento o acortamiento del cuerpo elástico (resorte), medido esto desde su posición de equilibrio cuando previamente se le ha aplicado una fuerza externa que le causa la deformación, generándole un trabajo. Como ejemplo se pueden citar una masa unida a un resorte, una piedra anexa a una cauchera, etc. Se recuerda que, a fin de que la masa o la piedra de los ejemplos citados en este párrafo presenten energía potencial elástica, el resorte debe estar previamente comprimido o estirado y la cauchera debidamente estirada.

La ecuación matemática general, según [16] y [19], que permite determinar la energía potencial elástica de un cuerpo de masa *m* adherido a un segundo cuerpo elástico, como, por ejemplo, un resorte, cuando este último es estirado o comprimido por una fuerza externa, se expresa de la siguiente manera:

$$E_{P.Elast.} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{205}$$

Donde:

- k: representa la constante elástica del cuerpo elástico que hace parte del sistema.
- x: representa la magnitud del vector de desplazamiento del cuerpo elástico respecto a su posición de equilibrio, bien sea que este se comprima o bien se estire.

Lo expresado en los puntos anteriores nos da a entender que, si un cuerpo de masa *m* está adherido a un resorte, cuando este último es comprimido o estirado por una fuerza externa la energía potencial elástica ganada por el resorte debido al trabajo realizado por la fuerza se le transmite al cuerpo. De igual forma le pasaría a una piedra en una cauchera, la cual previamente fue estirada. Por ejemplo, en la Fig. 248 se muestra un cuerpo de masa *m* que presenta una energía potencial elástica debido a que el resorte sufrió un estiramiento *x* respecto a su punto de equilibrio.

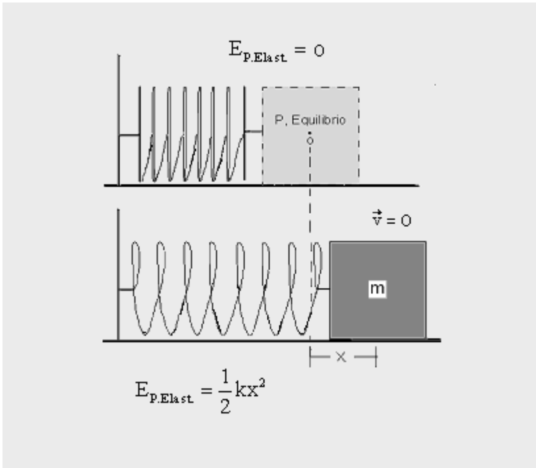


Figura 248. Cuerpo de masa *m* con energía potencial elástica debido al estiramiento *x* que sufre el resorte respecto a su punto de equilibrio. Fuente: elaboración propia

También en la Fig. 249 se muestra una piedra que presenta energía potencial elástica debido al estiramiento que sufrieron las cintas elásticas que componen la cauchera respecto a su punto de equilibrio. Esto debido a la aplicación de una fuerza externa ejercida sobre ellas por una persona.

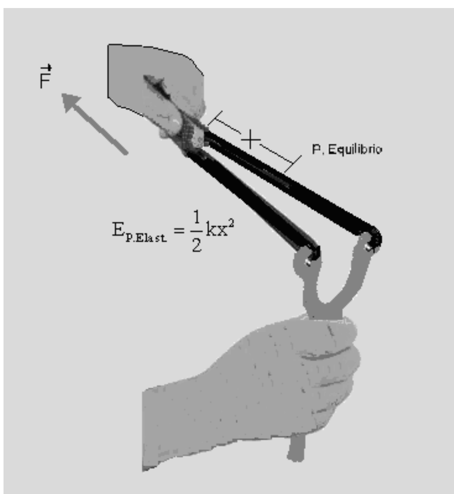


Figura 249. Piedra con energía potencial elástica debido a que las cintas elásticas que conforman la cauchera fueron estiradas al aplicarle una fuerza externa. Fuente: elaboración propia

Ejemplo 11.

Un resorte de constante de fuerza 0,3 N/m es desplazado hacia la derecha de su posición de equilibrio una distancia de 1,2 m. ¿Cuánta energía potencial elástica es almacenada por el cuerpo de masa *m* conectado a él? Véase la Fig. 250.

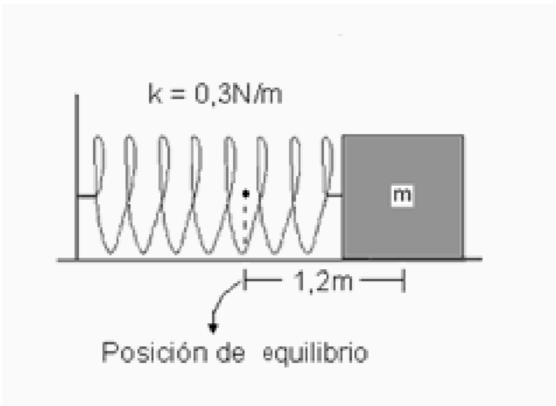


Figura 250. Cuerpo de masa *m* con energía potencial elástica, debido al estiramiento del resorte al cual se encuentra adherido. Su desplazamiento respecto a su posición de equilibrio es de 1,2 m. Fuente: elaboración propia

Solución

Para determinar la energía potencial elástica almacenada por el cuerpo de masa *m* debido al estiramiento del resorte se hace uso de (205), es decir:

$$E_{P.Elast.} = \frac{1}{2}kx^2$$

Con:

$$k = 0{,}3N/m \; ; \; x = 1{,}2m$$

Al reemplazar los valores anteriores en (205) tenemos que:

$$E_{P\ Elast} = \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}(0{,}3N/m)(1{,}2m)^2 = 0{,}216 \text{ joule}$$

Es decir, la energía almacenada por el cuerpo de masa *m* debido al estiramiento del resorte es de 0,216 joules.

Ejemplo 12.

Un resorte es comprimido por una fuerza $\vec{F}$ desde su posición de equilibrio una distancia de -2,5 m. Si su constante de fuerza es de 0,62 N/m, ¿cuál es el valor de la energía potencial elástica almacenada en él? Véase la Fig. 251.

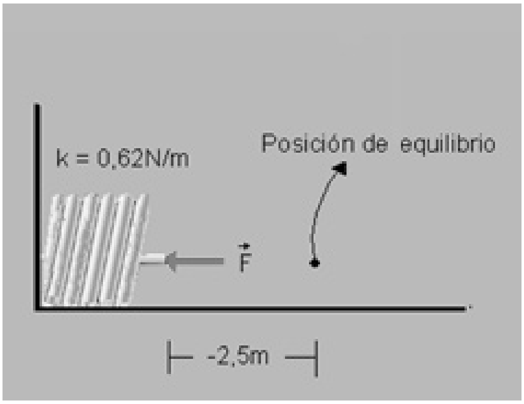


Figura 251. Resorte de constante de fuerza k = 0,62 N desplazado hacia la izquierda de su posición de equilibrio una distancia de -2,5 m por una fuerza externa de magnitud *F*.
Fuente: elaboración propia

Solución

Para determinar la energía potencial elástica almacenada en el resorte se utiliza (205), es decir:

$$E_{P.Elast} = \frac{1}{2}kx^2$$

Con:

$$K = 0{,}62N/n \ ; \ x = -2{,}5m$$

Al reemplazar los valores anteriores en (205) tenemos que:

$$E_{P\ Elast} = \frac{1}{2}(0{,}62N/m)(-2{,}5m)^2 = 1{,}937 \text{ joule}$$

Es decir, la energía total almacenada en el resorte, al ser comprimido desde su posición de equilibrio una distancia de -2,5 m, es de 1,937 joule.

Ahora bien, de acuerdo con [17], la energía potencial gravitacional es la que posee un cuerpo de masa m_0 debido a su posición relativa respecto al origen de un campo de fuerza central de tipo gravitacional, creado este último por un segundo cuerpo de masa *m*. Un ejemplo en particular es la Tierra, planeta que debido a su gran masa genera el campo gravitacional terrestre. De acuerdo con [1] y [18], el hecho de que exista el campo gravitacional terrestre conlleva a que los cuerpos que se encuentran sobre su superficie presenten una energía potencial respecto a ésta o respecto a su centro de masa, responsable del campo de fuerza. En sí, se puede medir la energía potencial gravitacional respecto a cualquier punto en el que se considere que se encuentra el origen o nivel cero del campo de fuerza. Véase la Fig. 252.

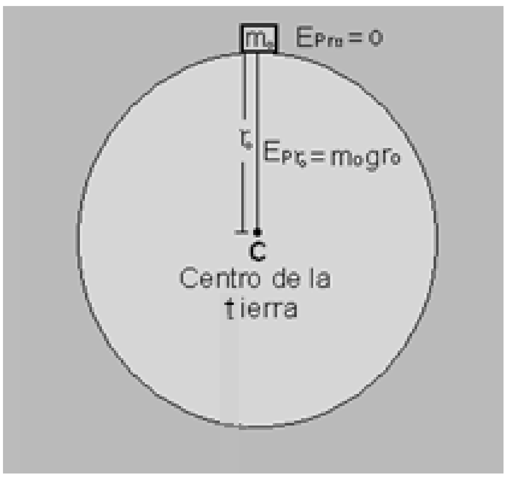


Figura 252. El cuerpo de masa m_0 que se encuentra sobre la superficie terrestre presenta una energía potencial gravitacional respecto al centro de la Tierra dada por la expresión $Ep = m_0 g r_0$. Es en este punto que se considera se localiza el origen del campo de fuerza gravitatorio. Sin embargo, se puede observar que esta masa no tiene energía potencial respecto a la superficie de la Tierra, ya que en esta $r_0 = 0$. Fuente: elaboración propia

Para que un agente externo (hombre) pueda elevar un cuerpo de masa m_0 desde la superficie de la tierra hasta cierto punto *p* sobre ella, este tiene que realizar un trabajo sobre él para poder desplazarlo en contra del campo de fuerza gravitacional, el cual permanentemente se dirige hacia el centro de la Tierra. Esta elevación le permite al cuerpo incrementar su energía potencial gravitacional respecto al origen del campo de fuerza, al ser esta última igual al trabajo realizado por la persona. Al observar la Fig. 252, y hacer uso de (192), la cual nos permite determinar el trabajo, podemos concluir que este último es igual a la fuerza que se requiere para trasladar el cuerpo a dicho punto multiplicado por la distancia vertical recorrida por éste hacia arriba (altura). En este caso, la magnitud de la fuerza aplicada se considera igual a la magnitud de la fuerza llamada "peso del cuerpo", es decir, $F = P = m_0g$, y la magnitud de su desplazamiento es igual a la altura *h* presentada por el cuerpo en el punto indicado *p*, es decir, $D = r - r_0 = h$.

Incremento de la Energía Potencial de un cuerpo de masa m_0 respecto al centro de la Tierra $\Delta E_p = E_{Pr} - E_{pro} = m_og(r - r_o) = E_{Ph} = m_ogh$; con $h = r - r_o$

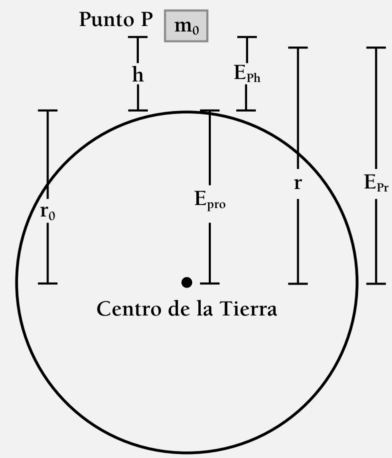


Figura 253. Incremento de la energía potencial gravitacional de un cuerpo de masa m_0 respecto al origen del campo de fuerza de la Tierra. Cuando una fuerza externa lo eleva desde la superficie terrestre hasta una altura *h*, Este incremento en la energía potencial del cuerpo se debe al trabajo realizado por una fuerza externa ejercida sobre él. Fuente: elaboración propia

Al utilizar (192), y de acuerdo con [18] y [19], se deduce que el trabajo realizado por el agente externo sobre el cuerpo está dado por:

$$W = P.\ h = m_0gh$$

Sin embargo, como se expresó en el párrafo anterior, este trabajo es igual al incremento de energía potencial del cuerpo ΔE_{ph}, es decir, $W = \Delta E_{ph}$. Según [1] y [16], la ecuación matemática que permite determinar el incremento de la energía potencial gravitacional de una masa m_0 sobre la cual se realiza un trabajo para elevarla sobre la superficie de la Tierra una altura *h* está dada por la expresión:

$$\Delta E_{ph} = m_0gh \qquad (206)$$

Donde:

- ΔE_{ph}: representa el incremento o la energía potencial gravitacional que tiene el cuerpo de masa m_0 respecto a la superficie terrestre.
- m_0: representa la masa a la cual se le mide la energía potencial gravitacional respecto a la superficie terrestre.
- g: es la magnitud de la aceleración imprimida a la masa debido al campo de fuerza gravitacional en el cual se encuentra inmerso. Este valor será considerado constante debido a las condiciones bajo las cuales son planteados los problemas.
- h: representa la posición o altura que tiene el cuerpo de masa m_0 respecto a la superficie terrestre.

Dado que, en la solución de problemas de energía potencial gravitacional en física mecánica, por lo general, solo se tiene en cuenta la energía que presenta el cuerpo respecto a la superficie de la Tierra (nivel cero), (206) se reescribe de la siguiente manera.

$$E_{P.Gravi.} = m_0 g h \tag{207}$$

Donde $E_{P.Gravi}$, en (207) representa, de forma general, la diferencia de energía potencial gravitacional que presenta un cuerpo respecto a la superficie de la Tierra. Por ejemplo, una persona que se encuentra en el quinto piso de un edificio tiene una energía potencial gravitacional debido a su posición respecto a la superficie de la Tierra, a causa del campo gravitacional generado por ésta. También el agua almacenada en un embalse presenta una energía de este tipo, la cual, al ser abierta las compuertas para bombear el agua hasta las casas y edificios de la población, a través de la tubería, se transforma en energía cinética, y llega a los grifos de los hogares como energía mecánica (energía potencial gravitacional + energía cinética). Ahora, con el fin de que se logre entender mejor este concepto de energía potencial gravitacional, además de cómo se gana o se pierde, a continuación, se tratan algunos ejemplos que permiten aclarar todo esto de mejor manera.

En la Fig. 254 se muestra una camiseta que presenta una energía potencial gravitacional respecto a la superficie terrestre dada por (207), es decir:

$$E_{P.Gravi.} = m_0 g h$$

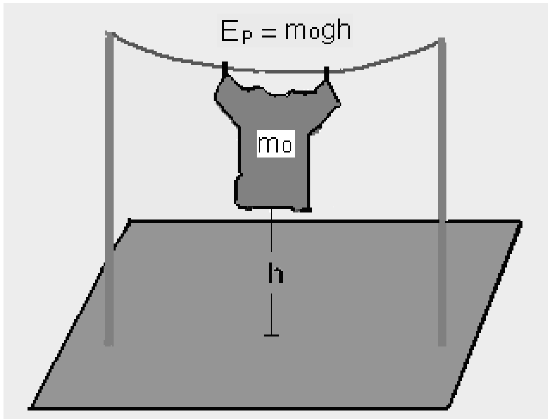


Figura 254. Camiseta con energía potencial gravitacional respecto a la superficie terrestre. Esta energía potencial la obtuvo del trabajo realizado por la persona que la colgó de la cuerda.
Fuente: elaboración propia

Esta energía potencial gravitacional diferente de cero que presenta la camiseta, se debe al trabajo realizado por el agente externo que la colgó sobre la cuerda para que se secara, es decir, la energía perdida por la persona debido a su esfuerzo realizado para llevar la prenda de vestir a la cuerda es igual a la energía ganada por ésta.

Ahora bien, en la Fig. 255 se muestra a tres personas de masas iguales (m_1, = m_2 = m_3). Éstas se encuentran a alturas diferentes respecto al piso h_1, h_2, h_3, con $h_3 > h_2 > h_1$. Cada una de ellas presenta una energía potencial gravitacional diferente respecto al piso. Como es razonable, la persona que tiene más energía en este caso es la que se encuentra a mayor altura. Esta energía potencial almacenada en cada hombre se debe al trabajo individual que realizaron cada uno de ellos para subir hasta el escalón donde se encuentran. Para esto tuvieron que haber invertido parte de su energía química almacenada en su organismo, la cual obtienen de los alimentos consumidos.

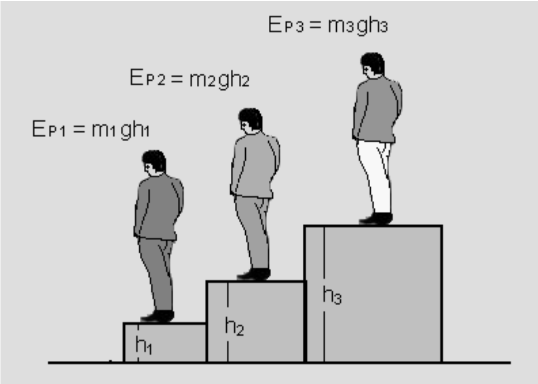


Figura 255. Tres personas de masas iguales se encuentran a diferentes alturas respecto al piso o superficie de la Tierra. La que se encuentra ubicada a mayor altura presenta mucha más energía potencial gravitacional que las demás, es decir, Ep3 > Ep2 > Ep1. Esta energía la obtuvieron del trabajo individual realizado por cada uno de ellos para llegar al escalón donde se encuentran ubicados. Fuente: elaboración propia

Ejemplo 13.

Calcule la energía potencial gravitacional que tiene cada una de las personas que se encuentran en los escalones de la Fig. 255, si a) $m_1 = 63$ kg, $h_1 = 0{,}54$ m, b) $m_2 = 56$ kg, $h_2 = 0{,}84$ m, y c) $m_3 = 52$ kg, $h_3 = 1{,}14$ m.

Solución

Para calcular la energía potencial almacenada por cada una de las personas que se encuentran en los escalones en la Fig. 255 se hace uso de (207), es decir:

$$E_{P.Gravi.} = m_0gh$$

a) Para la primera persona tenemos que:

$$m_0 = m_1 = 63kg;\ h = h_1 = 0{,}54m;\ g = 9{,}8m/s^2$$

Al reemplazar estos valores en (207) tenemos que:

$$E_{P.G.1.} = (63kg)(9{,}8m/s^2)(0{,}54m) = 333{,}39kgm^2/s^2$$

Es decir, la energía potencial gravitacional presentada por la primera persona es de:

$$E_{P.G.1} = 333{,}39\ joule$$

b) Para la segunda persona tenemos que $m_0 = m_2 = 56kg$; $h = h_2 = 0{,}84m$; $g = 9{,}8m/s^2$; si se reemplazan los valores anteriores en (207) tenemos que:

$$E_{P.G.2.} = (56kg)(9{,}8m/s^2)(0{,}84m) = 460{,}99kgm^2/s^2$$

Es decir, la energía potencial gravitacional presentada por la segunda persona es de:

$$E_{P.G.2} = 460{,}99 \text{ joule}$$

c) Para la tercera persona tenemos que:

$$m_0 = m_3 = 52kg;\ h = h_3 = 1{,}14m;\ g = 9{,}8m/s^2$$

Al reemplazar los valores anteriores en (207) tenemos que:

$$E_{P.G.3.} = (52kg)(9{,}8m/s^2)(1{,}14m) = 580{,}94kgm^2/s^2$$

Es decir, la energía potencial gravitacional presentada por la tercera persona es de:

$$E_{P.G.3.} = 580{,}94 joule$$

Ejemplo 14.

Calcule la energía potencial gravitacional ganada por el señor Juan Torres en la Fig. 256 al pasar del primer escalón al tercero, si se sabe que su masa es de 72,8 kg

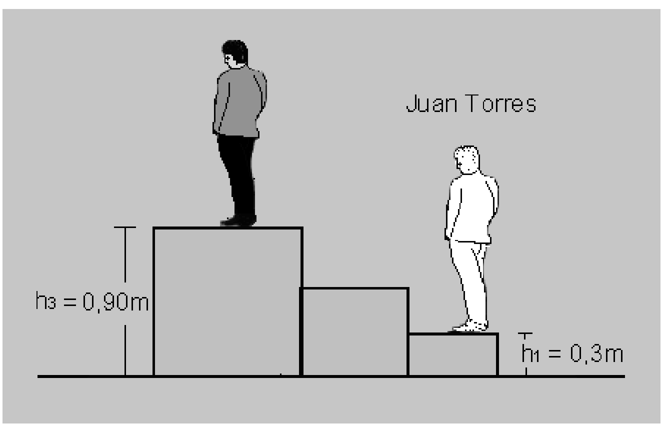


Figura 256. El señor Juan Torres, quien inicialmente se encontraba en el primer escalón en reposo, ha decidido pasar al tercer escalón desde el cual tiene una mejor visión de su entorno. Fuente: elaboración propia

Solución

Para calcular la energía potencial ganada por el señor Juan Torres se hace uso de (207), es decir:

$$E_{P.Gravi.} = m_0 gh$$

Ahora, se determina la energía potencial gravitacional del señor en cada uno de los escalones indicados en el texto del ejercicio, de modo que la diferencia de estas nos arrojará el incremento de su energía.

La energía inicial presentada por el señor Juan Torres en el primer escalón es de:

$$E_{P.G1.} = (72{,}8kg)(9{,}8m/s^2)(0{,}3m) = 214{,}03kgm^2/s^2$$

Ahora, la energía final presentada por el señor Juan Torres en el tercer escalón es de:

$$E_{P.G3.} = (72{,}8kg)(9{,}8m/s^2)(0{,}9m) = 642{,}09kgm^2/s^2$$

Finalmente, la ganancia de energía potencial gravitacional $\Delta P_{P.G}$ obtenida por el señor Juan Torres se determina de la siguiente manera:

$$\Delta E_{P.G} = (642{,}09 - 214{,}03)kgm^2/s^2 = 428{,}066kgm^2/s^2$$

Es decir, la energía ganada por el señor Juan Torres al pasar del primer escalón al tercero es de 428,066 joule.

c) Concepto de energía mecánica

Por otra parte, según [17] y [18], la energía mecánica de un cuerpo de masa *m* es el valor de energía neta que se obtiene al realizar la suma de su energía cinética con su energía potencial. Es decir, el valor que se deduce en esta operación es la magnitud de su energía mecánica. De acuerdo con lo expresado en [19] y [20], la ecuación matemática general que define la energía mecánica de cualquier cuerpo en particular se expresa de la siguiente manera:

$$E_m = E_c + E_p \tag{208}$$

Donde:

- E_m: representa la energía mecánica del cuerpo.
- E_c: representa la energía cinética del cuerpo.
- E_p: representa la energía potencial del cuerpo.

A continuación, se ilustran algunos ejemplos de cuerpos en particular con energía mecánica.

En la Fig. 257 se muestra una pelota que cae hacia la superficie terrestre con velocidad $\vec{V}$ desde una altura, debido a lo cual, según [18], [19] y [20], su energía mecánica está dada por la ecuación:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \tag{209}$$

Donde:

- $E_c = \frac{1}{2}mv^2$: es la energía cinética de la pelota.
- $E_p = mgy$: es la energía potencial gravitacional de la pelota.

Así, (209) indica que si un cuerpo se mueve paralelo o perpendicular a la superficie terrestre (al caer o subir) desde una altura y ≠ 0 y con velocidad $\vec{V}$, este presentará tanto energía cinética como energía potencial gravitacional. La energía cinética se debe a su velocidad, mientras que la energía potencial a causa de la altura que tiene respecto a la superficie de la Tierra, tal como se mencionó en párrafos anteriores.

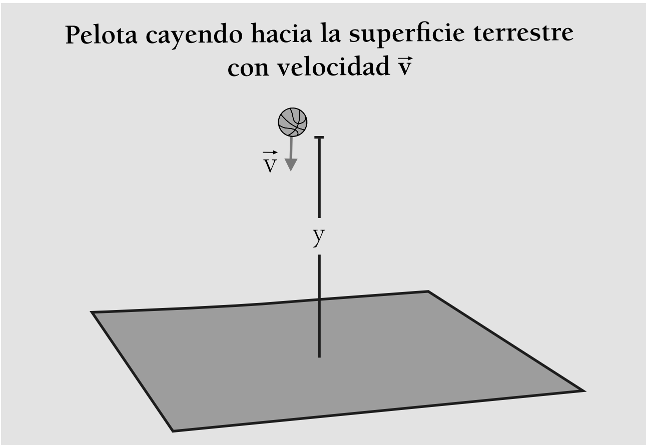


Figura 257. Pelota cayendo hacia la superficie de la Tierra desde una altura y con velocidad $\vec{V}$. Esta presenta energía potencial gravitacional debido a su altura, y también energía cinética a causa de su velocidad. La suma de estos dos tipos de energía determina su energía mecánica.
Fuente: elaboración propia

Ejemplo 15

Calcule la energía mecánica de un cuerpo de masa 1,3 kg cuando se mueve paralelo a la superficie terrestre a una altura de 3,4 m y con rapidez constante de 21,5 m/s.

Solución

Para determinar la energía mecánica del cuerpo se hace uso de (209), es decir:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Donde:

$$m = 1{,}3\text{ kg};\ v = 21{,}5\text{ m/s};\ g = 9{,}8\text{ m/s}^2;\ y = h = 3{,}4\text{ m}$$

Al reemplazar los valores anteriores en (209) tenemos que:

$$E_m = \frac{1}{2}(1{,}3\text{kg})(21{,}5\text{m/s})^2 + (1{,}3\text{kg})(9{,}8\text{m/s})(3{,}4\text{m}) = (300{,}46 + 43{,}31)\text{kgm}^2/s^2$$

Si se realiza la suma expresada en el paréntesis en la expresión de arriba se llega a:

$$E_m = 343{,}77\text{kgm}^2/s^2$$

Es decir, la energía mecánica total del cuerpo es de $E_m = 343{,}77$ joule.

Ahora bien, cuando se tiene un sistema masa-resorte la energía mecánica de la masa *m*, de acuerdo con [19] y [20], se expresa por medio de la siguiente ecuación:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (210)$$

Donde:

- $E_C = \frac{1}{2}mv^2$: es la energía cinética de la masa debido a su rapidez.
- $E_p = \frac{1}{2}kx^2$: es la energía potencial elástica de la masa debido a su desplazamiento x respecto a su posición de equilibrio en el resorte.

Así, (210) indica que si un cuerpo de masa *m* adherido a un resorte se mueve en conjunto con éste a velocidad $\vec{V}$ presentará tanto energía cinética como energía potencial elástica. La energía cinética se debe a su velocidad, mientras que la energía potencial elástica a causa de la posición que presente respecto a su punto de equilibrio.

A continuación, se ilustran algunos ejemplos particulares de masas unidas a resortes.

- *Energía mecánica de una masa m en reposo (v = 0) ubicada en su punto de equilibrio.* En la Fig. 258 se muestra el caso particular de una masa *m* que se encuentra en reposo y unida a un resorte que no se encuentra estirado o comprimido. Este estado particular del sistema (masa-resorte) nos lleva a concluir que la energía mecánica en este caso es nula, es decir: Em = 0, debido a que la masa no tiene energía potencial elástica, ya que x = 0; tampoco presenta energía cinética porque la rapidez v = 0.

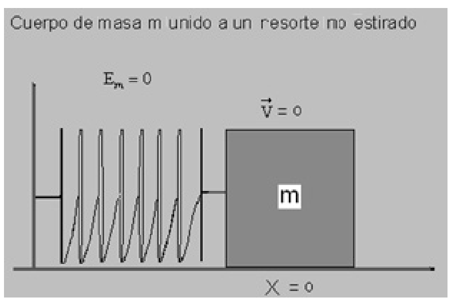


Figura 258. La masa en el sistema masa-resorte, además de encontrarse en el punto de equilibrio del resorte, es decir, en x = 0, su rapidez también es nula v = 0. Esto permite concluir que la energía mecánica de la masa es igual a cero ($E_m = 0$). Fuente: elaboración propia

- *Energía mecánica de un cuerpo en movimiento adherido a un resorte*. La Fig. 259 muestra inicialmente un sistema masa-resorte sin rozamiento y en equilibrio estático. Un instante después al sistema le es aplicada una fuerza externa que, además de causarle al resorte y al mismo tiempo a la masa un desplazamiento *x* hacia la derecha desde su punto de equilibrio, le genera a esta última un trabajo que le permite almacenar energía potencial elástica. Posteriormente, la masa es dejada en libertad causándole esto último un movimiento de tipo oscilatorio alrededor del punto de equilibrio. Se puede decir, entonces, que el cuerpo en la mayoría de los puntos de su trayectoria presenta tanto energía cinética como potencial. Recordemos que la energía mecánica de una masa en movimiento y adherida a un resorte, como se expresó, está dada por medio de (210).

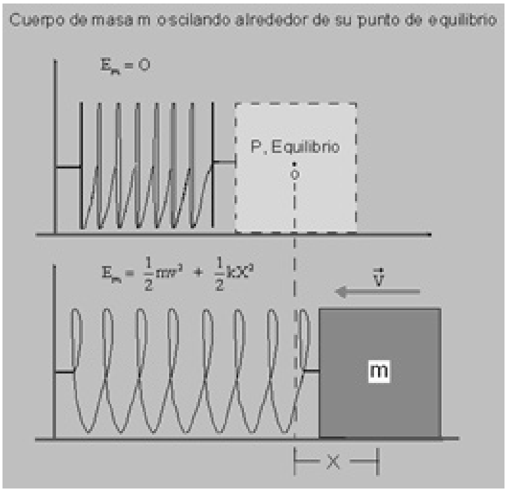


Figura 259. Cuando se estira el resorte al aplicarle una fuerza a la masa *m* que se encuentra adherida a él, se le realiza un trabajo que permite almacenar una energía potencial elástica. Luego de soltarla libremente presenta, en la mayoría de puntos de su movimiento oscilatorio, tanto energía cinética como potencial, es decir, en cada uno de ellos tiene una energía mecánica dada por (207). Fuente: elaboración propia

Ejemplo 16.

Determine la energía mecánica de un cuerpo de masa 2,7 kg que se encuentra adherido a un resorte de constante de fuerza 2,5 N/m, en el instante en que esta presenta una posición de 1,4 m con respecto a su posición de equilibrio y rapidez de 4,1 m/s. Véase la Fig. 260.

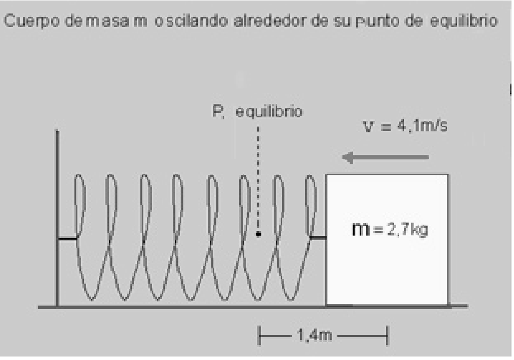


Figura 260. Cuerpo de masa 2,7 kg adherido a un resorte de constante de fuerza 2,5 N/m. Cuando la masa se encuentra a una distancia de 1,4 m respecto a su posición de equilibrio su rapidez es de 4,1 m/s. Fuente: elaboración propia

Solución

Para determinar la energía mecánica del cuerpo se hace uso de (210), es decir,

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kX^2$$

Con:

m = 2,7 kg, v = 4,1 m/s, k = 2,5 N/m;, y x = 1,4 m

Al reemplazar los valores anteriores en (210) tenemos que:

$$E_m = \frac{1}{2}(2{,}7kg)(4{,}1m/s)^2 + \frac{1}{2}(2{,}5N/m)(1{,}4m)^2 = 25{,}14kgm^2/s^2$$

El resultado anterior permite concluir que el valor de la energía mecánica del cuerpo, cuando este se encuentra a 1,4 m de distancia de su posición de equilibrio y con rapidez de 4,1 m/s, es:

$$E_m = 25{,}14 \text{ joule}$$

La Fig. 261 muestra una partícula de carga positiva q_0 que fue acercada hasta una distancia r_0 respecto a una segunda carga positiva q en contra de su campo eléctrico. Esto sugiere que hubo un agente externo, el cual tuvo que realizar un trabajo para llevar a cabo este acercamiento, permitiéndole, sobre todo, a la carga 1 almacenar una energía potencial de tipo eléctrica. Luego de ser liberada la carga 1 comienza a alejarse de la segunda carga y presenta una rapidez V en una posición r distinta a la inicial r_0. Se puede decir, entonces, que la carga q_0 en esta última posición, además de tener una energía cinética debido a su rapidez, mantiene una energía potencial eléctrica respecto al origen del campo de fuerza eléctrico generado por la carga q. Es decir, la energía de la carga q_0 en la posición r es de tipo mecánica.

La ecuación matemática que permite determinar la energía mecánica de la carga q_0 que se encuentra en presencia del campo eléctrico de una segunda carga q está dada de la siguiente manera:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{qq_o}{r} \qquad (211)$$

Donde:

- E_m: es la energía mecánica de la carga q_0.
- $E_c = \frac{1}{2}mv^2$: es la energía cinética de la carga q_0 debida a su rapidez V.
- $E_p = k\frac{qq_0}{r}$: es la energía potencial eléctrica de la carga q_0 debido a su posición respecto al campo de fuerza eléctrico generado por la carga *q*.

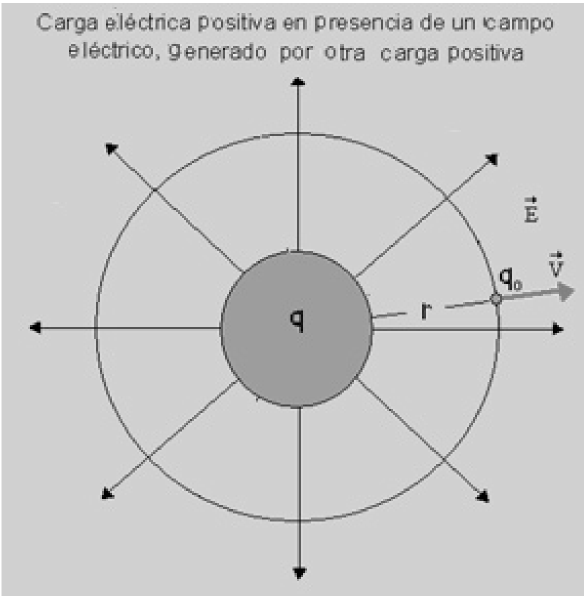


Figura 261. La carga q_0 fue acercada inicialmente una distancia r_0 a una segunda carga *q* por un agente externo. El agente le realizó un trabajo, debido a la fuerza que tuvo que aplicar en contra del campo eléctrico de la carga *q*, lo cual le permitió a q_0 almacenar una energía potencial eléctrica en esta posición. Luego se deja libre, de modo que se obtiene en una nueva posición *r* una rapidez *v*. Lo anterior nos permite concluir que en la posición *r* la carga posee energía mecánica, ya que presenta energía cinética por causa de su rapidez y una energía potencial eléctrica por la posición que tiene respecto al origen del campo eléctrico.
Fuente: elaboración propia

Ejemplo 17.

Un electrón, al pasar a una distancia de $1x10^{-1}$ m respecto de un segundo electrón que se encuentra en reposo, registra una rapidez de 3,2 m/s. ¿Cuál es la energía mecánica del primer electrón?

Solución

Para determinar la energía mecánica del primer electrón se hace uso de (211), es decir:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{qq_o}{r}$$

Con:

$$m = 9{,}1x10^{-31}\ kg\ ;\ v = 3{,}2\ m/s\ ;\ k = 9x10^{9}\ Nm^2/C^2\ ;\ q = q0 = -1{,}6x10^{-19}C\ ;$$
$$r = 1x10^{-1}\ m$$

Al reemplazar los valores anteriores en (211) tenemos que:

$$E_m = \frac{1}{2}(9{,}1x10^{-31}kg)(3{,}2m/s)^2 + (9x10^9\ Nm^2/C^2)\frac{(-1{,}6x10^{-19}C)^2}{1x10^{-1}\ m}$$

Si se desarrollan las operaciones indicadas en la parte de arriba se obtiene el valor para la energía mecánica del electrón, así:

$$E_m = (46{,}59x10^{-31} + 23040x10^{-31})\ joule = 23086{,}59x10^{-31}\ joule$$

2) Ley de conservación de la energía

Como es de conocimiento, existen en la naturaleza varias formas en las que se puede presentar la energía. El hombre, además de tratar de controlarla, ha buscado por medio de diversos métodos pasar una forma de energía a otra, con el objetivo de sacar provecho de esto, y en este sentido ha logrado avances en los campos científico y tecnológico. Así, de manera biunívoca el avance científico y tecnológico que ha tenido el hombre como resultado tanto del estudio de las diversas formas de energía como de sus transformaciones lo llevó a plantear, en términos generales, la llamada “ley de conservación de la energía”, la cual se define a continuación.

La ley de conservación de la energía, además de establecer que la energía no se crea ni se destruye, afirma que la cantidad neta de energía debe conservarse en su totalidad, y que esta solo puede transformarse de una forma a otra [22] [24]. Lo establecido en esta ley lleva a afirmar, en términos generales, que la energía total presente en un sistema en particular debe también conservarse. Esta última afirmación será de mucho provecho en la solución de problemas enmarcados dentro de la física mecánica. Estos pueden incluir sistemas de una sola partícula (carga puntual en presencia de un campo electromagnético) o sistemas conformados por varias partículas (cualquier tipo de gas), etc.

a) Conservación de la energía mecánica

Cuando observamos, por ejemplo, un fruto de mango que se encuentra en la punta de una de las ramas más altas del árbol, a partir de la experiencia se sabe que este tiene una energía potencial respecto a la superficie terrestre, debido a la posición o altura relativa que presenta con respecto a la tierra. Sin embargo, si en el momento de su observación éste se desprende de la rama, es posible observar que comienza a perder altura, lo cual ocasiona una disminución en su energía potencial. No obstante, encontramos también cómo a medida que desciende incrementa su velocidad, es decir, gana paulatinamente energía cinética. Finalmente, cuando el mango cae al suelo decimos que su energía potencial relativa a este punto es cero, debido a que su altura $h = 0$. Pero, además, sobre la superficie de la Tierra hallamos que su energía cinética es máxima, lo que implica que su velocidad de impacto con el suelo también sea máxima. Si se realizara el experimento anterior a la inversa, es decir, si se lanza el mango hacia arriba, se observaría cómo, a medida que gana altura, disminuye su energía cinética, pero su energía potencial se incrementa de manera progresiva, de tal forma que cuando alcanza la máxima altura a la que puede llegar su energía cinética se hace cero mientras que su energía potencial es máxima.

Se puede decir, entonces, a partir del análisis anterior, que existe una compensación igualitaria entre los dos tipos de energía para los casos anteriores, es decir, si en el primer caso (mango descendiendo) se pierden 5 julio de energía potencial por parte del mango al descender (pérdida de altura), al mismo tiempo gana 5 julio de energía cinética al aumentar su velocidad. En el segundo caso (mango subiendo) si se pierden 3 julio de energía cinética por parte del mango al subir (baja la velocidad), este gana 3 julio de energía potencial al ganar altura. De todo esto podemos concluir que la energía mecánica del mango permanece constante.

De acuerdo con [22] y [23], el principio de la conservación de la energía mecánica afirma que, a fin de que la energía total interna de un sistema aislado permanezca constante sobre este no debe haber fuerzas no conservativas aplicadas. De esta forma, aunque la energía en el interior del sistema se transforme de una forma a otra su valor será siempre el mismo. La ecuación matemática que la define según estos autores está dada por la siguiente expresión:

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante} \qquad (212)$$

- E_m: representa la energía mecánica del cuerpo.
- E_c: representa la energía cinética del cuerpo.
- E_p: representa la energía potencial del cuerpo.

En conclusión, (212) sugiere que, si bien la energía cinética de cualquier cuerpo en movimiento puede convertirse a potencial o su energía potencial a cinética, en el proceso su suma debe permanecer constante. Lo expresado en este párrafo se conoce como "principio de conservación de la energía mecánica".

Ejemplo 18.

Una pelota de baloncesto, de masa 1,2 kg, se mueve por la superficie horizontal que se muestra en la Fig. 262 con rapidez constante de 0,001 m/s, para luego descender por la superficie curva sin fricción. Al utilizar el principio de conservación de la energía mecánica determine: a) la energía mecánica de la pelota en el punto A, b) la rapidez de la pelota en el punto B, c) la altura a la que se encuentra en el punto C, d) su energía cinética en el punto D.

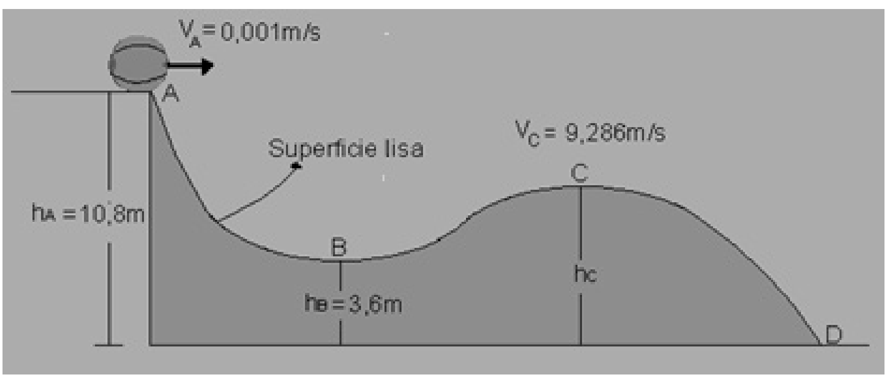


Figura 262. Pelota de baloncesto moviéndose inicialmente por la plataforma horizontal con rapidez constante de 0,001 m/s. Luego desciende vertiginosamente a través del tobogán curvo, convirtiendo de forma paulatina la energía potencial a cinética y viceversa.
Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para determinar el valor de la energía mecánica en el punto A se hace uso de (212), es decir:

$$E_{m.A} = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

Con:

$$m = 1{,}2kg \ ; \ V_A = 0{,}001m/s \ ; \ h_A = 10{,}8m \ ; \ g = 9{,}8m/s^2$$

Al reemplazar los valores anteriores en (212) tenemos que:

$$E_{m.A} = \frac{1}{2}(1{,}2kg)(0{,}001m/s)^2 + (1{,}2kg)(9{,}8m/s)(10{,}8m) = 127{,}008kgm^2/s^2$$

Es decir, el valor de la energía mecánica de la pelota en el punto A es de:

$$E_{m.A} = 127{,}008 \text{ joule}$$

b) Para determinar la rapidez de la pelota en el punto B, se hace uso de (212), es decir:

$$E_m = E_c + E_{p\,=}\,\text{constante}$$

Así, (212) sugiere que la energía mecánica de la pelota se conserva, es decir, que su valor es igual en los diferentes puntos en los que se le evalúe. Por tanto, se puede concluir que $E_{mA} = E_{mB}$, la cual, de acuerdo con (209) de la unidad se puede expresar también de la siguiente manera:

$$E_{m.A} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \,(\text{con } y{=}h_B\,)$$

Ahora, al despejar V_B en la ecuación anterior tenemos que:

$$v_B = \sqrt{\frac{2(E_{m.A} - mgh_B)}{m}}$$

Donde:

$$E_{m.A} = 127{,}008J \ ; \ m = 1{,}2kg \ ; \ h_B = 3{,}6m \ ; \ g = 9{,}8m/s^2$$

Al reemplazar los valores anteriores en la ecuación de arriba se obtiene que:

$$v_B = \sqrt{\frac{2[127{,}008J-(1{,}2kg)(9{,}8m/s^2)(3{,}6m)]}{1{,}2\ kg}} = \sqrt{\frac{2[127{,}008kgm^2/s^2 - 42{,}33kgm^2/s^2]}{1{,}2\ kg}}$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la última raíz, se simplifica y se saca raíz cuadrada, se obtiene el valor de la rapidez de la pelota en el punto B, es decir que:

$$v_B = 11{,}87m/s$$

c) Mediante (209) tenemos que:

$$E_{m.A} = \frac{1}{2}mv_c^2 + mgh_c$$

Al despejar h_c en la ecuación anterior se obtiene que:

$$h_C = \frac{E_{m.A} - \frac{1}{2}mv_C^2}{mg}$$

Con:

$$E_{m.A} = 127{,}008J\ ;\ m= 1{,}2kg\ ;\ V_c= 9{,}286m/s\ ;\ g = 9{,}8m/s^2$$

Al remplazar los valores anteriores en la ecuación de arriba, la cual permite determinar la altura en el punto C, tenemos:

$$h_C = \frac{127{,}008kgm^2/s^2 - \frac{1}{2}(1{,}2kg)(9{,}286m/s^2)}{(1{,}2kg)(9{,}8m/s^2)} = \frac{127{,}008kgm^2/s^2 - 51{,}737kgm^2/s^2}{11{,}76kgm/s^2}$$

Si se realizan las operaciones indicadas en la última fracción y se simplifica, obtenemos el valor de la altura a la que se encuentra la pelota en el punto C, así:

$$h_c = 6{,}4m$$

d) Para determinar la energía cinética en el punto D se hace uso de (209), de modo que queda de la siguiente manera:

$$E_{m.A} = E_{CD} + E_{PD}$$

Dado que $h_D = 0$, entonces $E_{PD} = mgh_D = 0$, por tanto, la ecuación anterior queda expresada así:

$$E_{m.A} = E_{CD}$$

Como $E_{m.A} = 127{,}008J$, tenemos que la energía cinética de la pelota en el punto *D* es de:

$$E_{C.D} = 127{,}008J$$

Ejemplo 19.

Un cuerpo de masa 5,40 kg es lanzado desde una altura de 12,6 m hacia abajo con una rapidez inicial de 1,2 m/s directamente hacia un resorte de 0,44 m de longitud y constante de fuerza 14400 N/m. Al utilizar el principio de conservación de la energía mecánica determine: a) la rapidez del cuerpo un instante antes de empezar a comprimir el resorte, b) cuánto se comprime el resorte cuando la velocidad del cuerpo se reduce a 5,5 m/s, y c) el valor de la energía potencial elástica en el resorte bajo las condiciones del inciso b). Véase la Fig. 263.

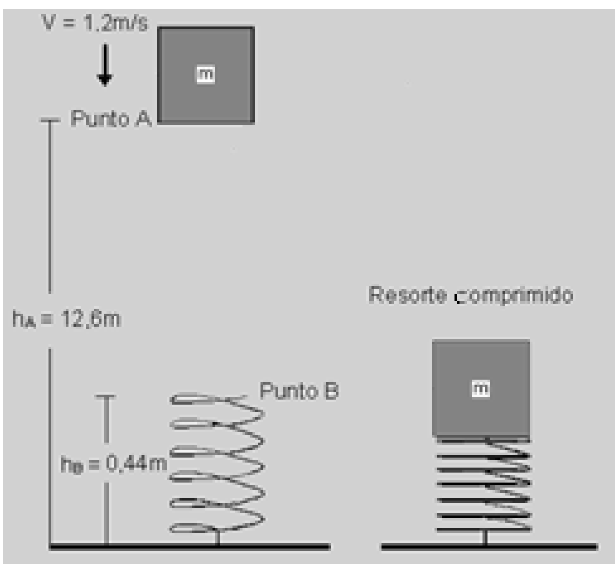


Figura 263. Cuerpo de masa 5,40 kg lanzado de arriba hacia abajo con una rapidez inicial de 1,2 m/s desde una altura de 12,6 m. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para determinar la rapidez del cuerpo un instante antes de empezar a comprimir el resorte se aplica el principio de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B, así:

$$E_{mA} = E_{mB}$$

Es decir:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Al despejar VB en la ecuación anterior, agrupar y sacar factor común se obtiene:

$$v_B = \sqrt{\frac{2\left[\frac{1}{2}mv_A^2 + mg\,(h_A - h_B)\right]}{m}}$$

Con:

$$m = 5{,}40kg\ ;\ h_A = 12{,}6m\ ;\ h_B = 0{,}44m\ ;\ v_A = 1{,}2m/s\ ;\ g = 9{,}8m/s$$

Al reemplazar los valores anteriores en la expresión de arriba se obtiene que:

$$v_B = \sqrt{\frac{2\left[\frac{1}{2}(5{,}40kg)(1{,}2m/s)^2 + (5{,}40kg)(9{,}8m/s)(12{,}6m - 0{,}44m)\right]}{5{,}40kg}}$$

Si se realizan las operaciones indicadas dentro del radical y se simplifica términos semejantes, se determina que el valor de la rapidez del cuerpo en el punto B es de:

$$v_B = 15{,}48m/s$$

Es decir, un instante antes de que el resorte comience a comprimirse el cuerpo presenta una rapidez de 15,48 m/s. Esto último es lo que se puede observar específicamente en el punto B.

b) Al utilizar el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto B y el punto *x*, donde la velocidad del cuerpo es de 5,5 m/s, tenemos que:

$$E_{mB} = E_{mX}$$

Es decir:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv_X^2 + E_{P.G} + E_{P.Elast.}$$

Obsérvese que en este punto desconocido *x* aparecen dos energías potenciales en el cuerpo, una debido a la altura (E. gravitacional) y la segunda debido a que el resorte se comprime (E. elástica). Por tanto, la expresión anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv_X^2 + mg(h_B - x) + \frac{1}{2}kx^2$$

Al desarrollar el producto indicado en el paréntesis de la parte derecha de la ecuación de arriba, agrupar, sacar factor común y cancelar términos semejantes se llega a la ecuación:

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_x^2) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

Con:

$$m = 5{,}40kg \; ; \; v_x = 5{,}5m/s \; ; \; v_B = 15{,}48m/s \; ; \; k = 14400\ N/m; \; g = 9{,}8m/s$$

Al reemplazar los valores anteriores en la ecuación de arriba tenemos que:

$$\frac{1}{2}(5{,}40kg)\,[(15{,}48m/s)^2 - (5{,}5m/s)^2] = \frac{1}{2}(14400N/m)x^2 - (5{,}40\ kg)(9{,}8m/s^2)x$$

Si se realizan las operaciones indicadas en los dos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$565{,}327J = (7200N/m)x^2 - (52{,}92kgm/s^2)x$$

Al organizar los términos en la ecuación de arriba sin tener en cuenta las unidades de los coeficientes numéricos de la variable *x* tenemos que:

$$7200x^2 - 52{,}92x - 565{,}327 = 0$$

Si se soluciona la ecuación para *x* tenemos:

$$x = \frac{52,92 \pm \sqrt{(52,92)^2 - 4(7200)(-565,327)}}{2(7200)}$$

Al realizar las operaciones dentro del radical en la ecuación de arriba se obtiene:

$$x = \frac{52,92 \pm \sqrt{16284218,13}}{14400} = \frac{52,92 \pm 4035,370}{14400}$$

De la ecuación anterior se deducen los siguientes valores para *x*:

$$x_1 = \frac{52,92 + 4035,370}{14400} = 0,284\text{m} \ ; \ x_2 = \frac{52,92 - 4035,370}{14400} = -0,276\text{m}$$

La solución del ejercicio es $x = 0,284\text{m}$, ya que este valor es el que cumple con las condiciones de conservación de la energía mecánica; el otro valor no cumple.

c) Para determinar la energía potencial elástica del resorte se hace uso de la ecuación:

$$E_{P.Elast} = \frac{1}{2}kx^2$$

Con:

$$x = 0,284\text{m} \ ; \ k = 14400\text{N/m}$$

Al reemplazar los valores anteriores en la ecuación de arriba, la cual permite determinar la energía potencial elástica en el resorte, tenemos:

$$E_{PX} = \frac{1}{2}(14400\text{N/m})(0,284\text{m})^2 = 580,723\text{Nm}$$

Es decir, la energía potencial elástica del resorte cuando la rapidez del cuerpo se ha reducido a 5,5 m/s es de:

$$E_{P.Elast} = 580,723 \text{ joule}$$

E. Teorema del trabajo y la energía

Siempre que una fuerza externa realice trabajo sobre un cuerpo esto conlleva cambiarle a este uno de sus observables físicos, conocido como "energía cinética". Así, de acuerdo con [21], [22], [23] y [24], la cantidad de trabajo realizado al cuerpo y el valor de la variación en su energía cinética se consideran equivalentes, y se relacionan a través de una ecuación matemática llamada "teorema" o "principio del trabajo y la energía". Ahora bien, con el fin de obtener la ecuación que relaciona estos dos observables físicos y, al mismo tiempo, obtener un mejor entendimiento del teorema, en la Fig. 264 se muestra un cuerpo de masa m al que se le viene aplicando una fuerza constante $\vec{F}$ en la dirección de la recta que une los puntos A y B, la cual le causa un desplazamiento $\vec{D}$ en un tiempo t. Luego, a fin de alcanzar el logro propuesto inicialmente se procede a determinar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre el cuerpo, para lo cual se hace uso de (193), es decir:

$$W = FD\cos\alpha$$

Sin embargo, en este caso $\alpha=0^\circ$, por tanto, la ecuación de trabajo para la masa m queda expresada de la siguiente manera:

$$W = FD; \text{ (recuerde: } \cos 0^\circ = 1)$$

La ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$W = maD; \text{ (recuerde que } F = ma)$$

Dado que el movimiento de la masa m es acelerado, recordemos que una de sus ecuaciones escalar de movimiento queda expresada de la siguiente manera:

$$2aD = V_B^2 - V_A^2$$

Al despejar el producto aD en la expresión anterior tenemos que:

$$aD = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2}$$

Si se reemplaza la expresión de arriba en la ecuación anterior, que permite determinar el trabajo de la masa m, se obtiene:

$$W = m\left(\frac{V_B^2 - V_A^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 \tag{213}$$

Sin embargo, se conoce que:

- $E_{CA}=\frac{1}{2}mV_A^2$: es la energía cinética de la masa m en el punto A.
- $E_{CB}=\frac{1}{2}mV_B^2$: es la energía cinética de la masa m en el punto B.

Por todo lo anterior, la ecuación del trabajo realizado sobre el cuerpo de masa *m*, debido a la fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre él, queda expresada según [24] de la siguiente manera:

$$W = E_{CB} - E_{CA} = \Delta E_C \tag{214}$$

Así, (214) define el llamado "teorema del trabajo y la energía", y, desde el punto de vista físico, sugiere que el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al desplazar el cuerpo de masa *m* una distancia *D* desde el punto A hasta el punto B es igual a la diferencia o incremento de las energías cinéticas que presenta el cuerpo en los correspondientes puntos B y A, tal como se muestra en la Fig. 264.

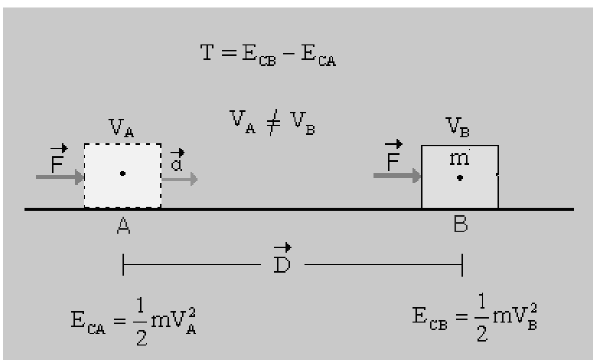


Figura 264. Cuerpo de masa *m* sobre el cual se aplica una fuerza constante $\vec{F}$. Esta fuerza lo desplaza una distancia *D* entre los puntos inicial A y final B, realizándole un trabajo que es igual a la diferencia de energía cinética que presenta el cuerpo en estos puntos, es decir, T= E_{CB} – E_{CA}. Fuente: elaboración propia

Ejemplo 20.

Determine el trabajo realizado sobre un cuerpo de masa 56,10kg. Cuando al aplicarle una magnitud de fuerza constante *F* en dirección *x*, esta pasa del reposo a tener una rapidez de 12,4 m/s después de ser trasladada una distancia *D*. Véase la Fig. 265.

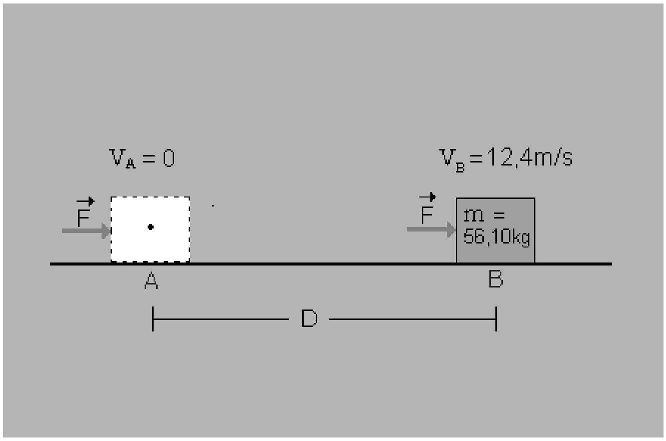


Figura 265. Cuerpo de masa 56,10 kg se traslada desde el reposo del punto A al punto B por una magnitud de fuerza externa *F* una distancia *D*. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para determinar el trabajo realizado sobre el cuerpo se hace uso de (213), es decir:

$$W = \frac{1}{2} mV_B^2 - \frac{1}{2} mV_A^2$$

Con:

$$V_A = 0 \text{ ; } V_B = 12{,}4m/s \text{ ; } m = 56{,}10kg$$

Al reemplazar los valores anteriores en (212) se obtiene el trabajo realizado sobre el cuerpo, es decir:

$$W = \frac{1}{2}(56{,}10kg)(12{,}4m/s)^2 - \frac{1}{2}(56{,}10kg)(0)^2 = 4312{,}96J$$

Ejemplo 21.

Un cuerpo de 4,26 kg se mueve en línea recta con rapidez inicial de 6,21 m/s. Después de que una fuerza externa realiza un trabajo sobre él de 110,30 J, se encuentra que su rapidez ha variado significativamente. Determine la rapidez final del cuerpo. Véase la Fig. 266.

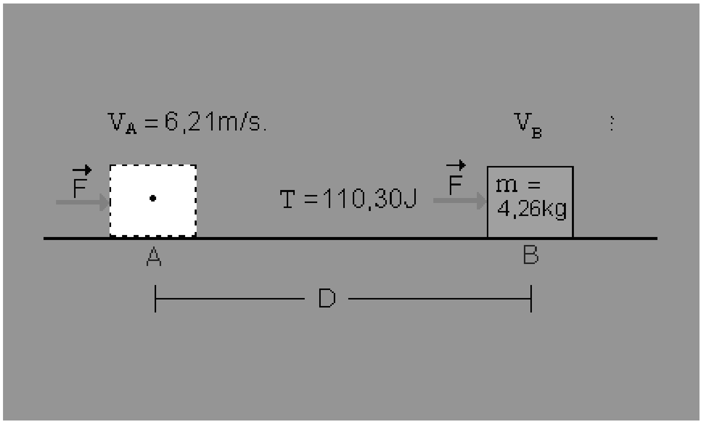


Figura 266. Cuerpo de masa 4,26 kg con rapidez inicial de 6,21 m/s. Un instante después una fuerza externa de magnitud *F* le realiza un trabajo de 110,30 J, desplazándolo una distancia *D*. Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para determinar la rapidez final del cuerpo se hace uso de (213), es decir:

$$W = \frac{1}{2}\mathrm{m}V_B^2 - \frac{1}{2}\mathrm{m}V_A^2$$

Al despejar V_B en la ecuación anterior, tenemos que:

$$V_B = \sqrt{\frac{2\left(W + \frac{1}{2}mv_A^2\right)}{\mathrm{m}}}$$

Con:

$$V_A = 6{,}21\mathrm{m/s}\ ;\ W = 110{,}30\ \mathrm{J}\ ;\ \mathrm{m} = 4{,}26\mathrm{kg}$$

Si se reemplazan los valores anteriores en la ecuación de arriba tenemos que:

$$V_B = \sqrt{\frac{2\left[110{,}30\mathrm{kgm^2/s^2} + \frac{1}{2}(4{,}26\mathrm{kg})(6{,}21\mathrm{m/s})^2\right]}{4{,}26\mathrm{kg}}}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas dentro del radical, simplificar términos semejantes y sacar raíz cuadrada, se obtiene finalmente la rapidez del cuerpo, es decir:

$$V_B = 9{,}50 m/s$$

Ejemplo 22.

Una pistola dispara balines con rapidez inicial de 60 m/s. Si uno de los balines que tiene una masa de 0,22 kg penetra en línea recta un bloque de queso una profundidad 12,20 cm, determine la magnitud de la fuerza media que actúa sobre el balín para poder detenerlo. Véase la Fig. 267.

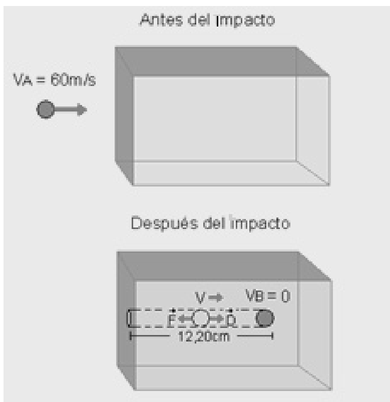


Figura 267. Proyectil de balín moviéndose con rapidez constante de 60 m/s. Este penetra un bloque de queso que se encuentra en su trayectoria, deteniéndose debido a las fuerzas de rozamiento una distancia respecto al orificio de entrada de 12,20 cm.
Fuente: elaboración propia

Solución

a) Para dar solución al ejercicio se hace uso de (193), es decir:

$$W = FD\cos\alpha$$

Con α=180º, la ecuación anterior de trabajo o energía queda expresada de la siguiente manera:

$$W = -FD \text{ (recuerde } \cos\alpha = \cos 180º = -1)$$

De (213) sabemos que la energía o trabajo se puede expresar también de la siguiente forma:

$$W = \frac{1}{2} mV_B^2 - \frac{1}{2} mV_A^2$$

Al sustituir la expresión de trabajo W = -FD en la expresión de arriba se obtiene:

$$-FD = \frac{1}{2} \mathrm{m}V_B^2 - \frac{1}{2} \mathrm{m}V_A^2$$

Con:

$$\mathrm{D}= 12{,}20\mathrm{cm} = 0{,}122\mathrm{m} \ ; \ \mathrm{m} = 0{,}22\mathrm{kg} \ ; \ V_A = 60\mathrm{m/s} \ ; \ V_B = 0$$

Al reemplazar los valores de arriba en la ecuación anterior tenemos:

$$(-0{,}122\mathrm{m})\ \mathrm{F} = 0 - \frac{1}{2}(0{,}22\mathrm{kg})(60\mathrm{m/s})^2\ \mathrm{mm}$$

Si se despeja la variable de magnitud de fuerza *F* en la ecuación anterior y se desarrollan las operaciones indicadas, se obtiene finalmente su valor, así:

$$\mathrm{F}= 3245{,}90\mathrm{N}$$

F. Resumen Unidad 5.

A continuación, se sintetizan aspectos relevantes de la unidad en los siguientes puntos:

- *Trabajo.* Una fuerza realiza trabajo sobre un cuerpo si esta o una de sus componentes logra desplazarlo en su dirección de aplicación. La ecuación matemática que la define está dada por:

$$\mathrm{T}=\vec{\mathrm{F}}\circ\vec{\mathrm{D}}$$

- *Trabajo de fuerzas conservativas.* Cuando un cuerpo de masa *m* se encuentra en presencia de un campo de fuerzas conservativas, el trabajo realizado por estas últimas para llevar el cuerpo de un punto A a un punto B, ubicados estos dentro de su espacio de acción, no depende de la trayectoria elegida para su traslado, solo de los puntos inicial P_A y final P_B. La ecuación matemática que permite determinar el trabajo realizado por un campo de fuerza conservativo esta dada por la expresión:

$$W = E_{pi} - E_{pf}$$

Donde *EPi* y *EPf* son la energía potencial gravitacional en cada uno de los puntos inicial y final respectivamente.

- *Trabajo de fuerzas disipativas.* Contrario al realizado por las fuerzas conservativas, este tipo de trabajo sí depende de la trayectoria seguida por el cuerpo para ir de un punto a otro. Es decir, aquí la energía no se conservará si se decide tomar diversos caminos de recorrido. Una de las fuerzas pertenecientes a este tipo de fuerzas disipativas es la de rozamiento. La ecuación matemática que permite determinar el trabajo realizado por un campo de fuerzas disipativas está dada por la expresión:

$$W = \vec{F}_r \circ \vec{D} = \mu_c \vec{N} \circ \vec{D}$$

Donde:

- Td: es el trabajo.
- $\vec{F}_r$: es la fuerza de rozamiento.
- $\vec{D}$: es el desplazamiento sufrido por el cuerpo para ir de un punto a otro.
- *Potencia.* Es el trabajo realizado en la unidad de tiempo. La ecuación matemática que la define está dada por:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{E}{t}$$

Donde:

- P: potencia.
- W: trabajo.
- t : tiempo empleado en realizar el trabajo.
- E: energía.
- *Energía.* Es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo. Los diferentes tipos de energías conocidas son: mecánica, eléctrica, lumínica, calórica, sonora y nuclear, entre otras.

- *Energía cinética.* Es la que posee un cuerpo a causa de su movimiento, es decir, de su velocidad. Esta se divide en energía cinética traslacional y energía cinética rotacional. Las ecuaciones matemáticas que la definen son:

  $E_c \frac{1}{2} mV^2$ (energía cinética traslacional)

  $E_{cr} \frac{1}{2} I\omega^2$ (energía cinética rotacional)

- *Energía potencial.* Es la que presenta un cuerpo debido a su posición relativa respecto al origen de un campo de fuerza. Las ecuaciones matemáticas que la definen según el caso son:

  $E_{P.Elect.} = U_{Elect} = k \frac{qq_0}{r}$ energía potencial eléctrica

  $E_{P.Elast.} = \frac{1}{2} kx^2$ energía potencial elástica

  $E_{P.Gravi.} = m_0gh$ energía potencial gravitacional

- *Energía mecánica.* Es la suma de la energía potencial y la energía cinética que presenta un cuerpo en particular. Matemáticamente, se define de la siguiente manera:

$$E_m = E_c + E_p$$

Donde:

- E_m = energía mecánica.
- E_c = energía cinética.
- E_p = energía potencial.
- *Ley de conservación de la energía.* Establece que la energía no se crea ni se destruye. Además, afirma que la cantidad neta de energía debe conservarse en su totalidad, y que esta solo puede transformarse de una forma a otra.
- *Conservación de la energía mecánica.* Establece que, siempre que un cuerpo se encuentre inmerso dentro de un campo de fuerzas conservativo, su energía mecánica permanecerá inmutable, aunque en ciertos tiempos y puntos diferentes varíe su energía cinética y potencial. Es decir, Em = constante. De esto último se deduce la siguiente ecuación:

$$Eci + Epi = Ecf + Epf$$

Donde:

- E_{ci}: es la energía cinética en el punto inicial.
- E_{pi}: es la energía potencial en el punto inicial.
- E_{cf}: es la energía cinética en el punto final.
- E_{pf}: es la energía potencial en el punto final.
- *Teorema del trabajo y la energía.* Afirma que el trabajo realizado por una fuerza externa cualquiera para desplazar un cuerpo de masa *m* de un punto A a un punto B es igual a la diferencia de energía cinética presentada por esté en los correspondientes puntos. Matemáticamente se define de la siguiente manera.

$$W = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2$$

Donde:

- T: es el trabajo realizado por la fuerza externa sobre el cuerpo.
- m: masa del cuerpo sobre el que se realiza el trabajo.
- V_A: rapidez del cuerpo en el punto inicial A.
- V_B: rapidez del cuerpo en el punto final B.

G. Ejercicios de aplicación.

1) Problemas de trabajo

a. Un hombre empuja una caja sobre una superficie horizontal lisa, con una magnitud de fuerza constante horizontal de 62,20 N. Si durante cuatro segundos logra desplazarlo una distancia de 54 m, ¿cuál es el trabajo realizado por el hombre sobre la caja?

b. En la Fig. 268 se muestra un cuerpo de masa *m*, sobre el cual actúan cinco fuerzas constantes. ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el cuerpo de masa *m* debido a las fuerzas, si este se desplaza una distancia de 12,6 m hacia la derecha en un tiempo de 2,5 s? Véase la Fig. 268.

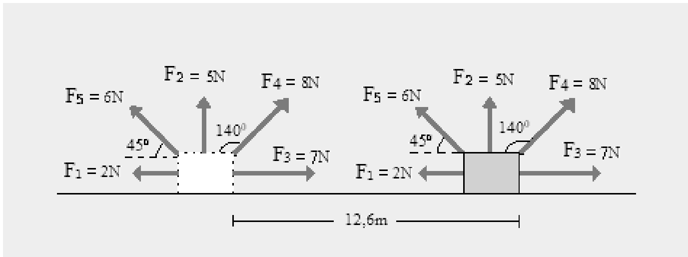


Figura 268. Fuerzas actuando sobre un cuerpo de masa m

c. Un cuerpo de masa 40 kg se deja caer desde una superficie inclinada lisa como se muestra en la Fig. 269, determine el trabajo realizado por la componente del peso de la masa en la dirección de la superficie, hasta que el cuerpo llega a la base.

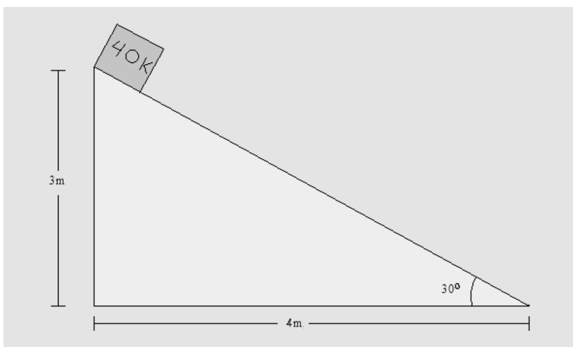


Figura 269. Cuerpo de masa 40kg deslizándose sobre una superficie inclinada lisa.
Fuente: elaboración propia

d. Si la superficie inclinada del ejercicio c) tuviera un coeficiente de rozamiento cinético de 0,04, ¿cuál es el valor del trabajo realizado por la fuerza de rozamiento de la superficie sobre el cuerpo?, ¿cuál es el valor del trabajo neto realizado por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa 40 kg?

e. Una caja llena de manzanas de masa 4000 kg es trasladada por un elefante, el cual le aplica una fuerza de $12x10^4$ N. Determine el trabajo realizado por el elefante sobre la caja si este la arrastra una distancia de 12,5 m, halle el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento de la superficie sobre la cual se traslada la caja si su coeficiente de rozamiento cinético es de 0,03, y determine el trabajo neto de las fuerzas que actúan sobre la caja. Véase la Fig. 270.

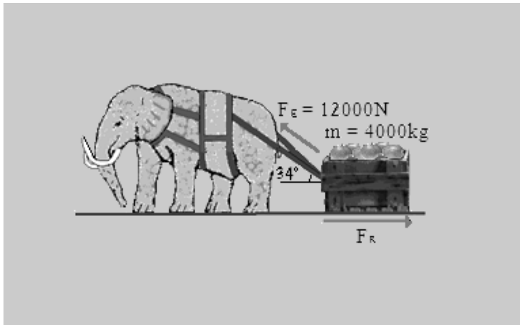


Figura 270. Elefante tirando de una caja con manzanas de 4000kg de masa.
Fuente: elaboración propia

f. Se deja caer una pelota desde la parte superior de la superficie semiesférica que se muestra en la Fig. 271. Si el coeficiente de rozamiento de rodamiento de la superficie es de 0,2, determine el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento de la superficie sobre la pelota, el trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre la pelota y la máxima altura *h* a la que llega la pelota en el extremo derecho de la superficie.

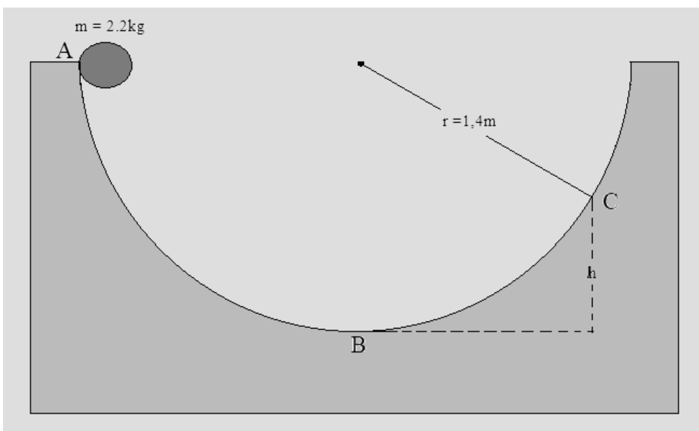


Figura 271. Pelota deslizándose sobre una superficie semiesférica. Fuente: elaboración propia

g. Un hombre hala hacia arriba del plano inclinado con rozamiento un bloque de madera de masa 50 kg, con una magnitud de fuerza de 4200 N. Si el coeficiente de rozamiento cinético de la superficie inclinada es de 0,005 determine el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando su desplazamiento horizontal es de 175 cm, medidos estos desde la base del plano. ¿Cuál es el valor del trabajo neto de las fuerzas aplicadas al bloque para este desplazamiento? Véase la Fig. 272.

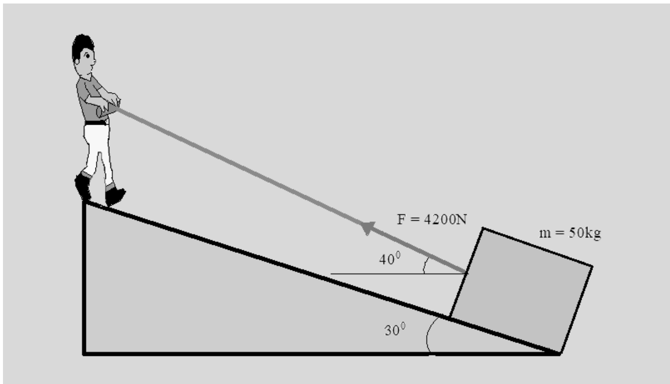


Figura 272. Hombre tirando hacia arriba de un plano inclinado un bloque de masa 50 kg.
Fuente: elaboración propia

h. Un estudiante de física determina que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre una carreta y la superficie rústica sobre la cual se mueve en línea recta es de 256 J. ¿Cuál es la distancia recorrida por la carreta si su masa es de 50 kg y el coeficiente de rozamiento cinético de la superficie es de 0,22? Si para mover la carreta a velocidad constante sobre la superficie se necesita una fuerza de 180 N, ¿cuál es el valor del trabajo realizado por esta fuerza?

i. Determine el trabajo neto realizado por la fuerza de gravedad sobre una roca de masa 10,5 kg cuando esta es elevada verticalmente una altura de 5,2 m respecto a la superficie de la tierra.

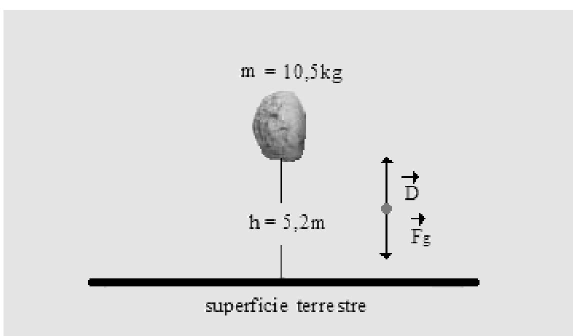


Figura 273. Roca elevada sobre la superficie terrestre a una altura de 5,2m.
Fuente: elaboración propia

j. Determine el trabajo realizado por un resorte sobre una masa de 3,52 kg cuando este es estirado hacia la derecha una distancia de 6,32 cm y presenta una constante de elasticidad k = 1,62 N/m. Véase la Fig. 274.

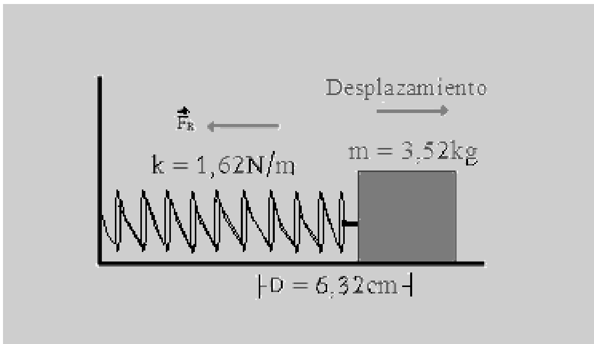


Figura 274. Masa de 3,52kg adherida a un resorte que es estirado una longitud de 6,32cm respecto a su punto de equilibrio. Fuente: elaboración propia

2) Problemas de potencia

a. El estudio de un motor diésel muestra que este puede realizar un trabajo de 245 000 joule en diez segundos. ¿Cuál es la potencia mecánica del motor?
b. Un motor eléctrico puede elevar de forma vertical una carga de $810x10^4$ N de peso a una altura de 30 m en siete segundos. Determine la potencia mecánica del motor para este caso.
c. La potencia mecánica de un motor de gasolina es de 42 000 W, si este puede elevar verticalmente una carga de 5000 kg en seis segundos, ¿cuál es el desplazamiento vertical que sufre la carga?
d. Un cargador eleva verticalmente una carga de masa 34 000 kg a una altura de 4,4 m. Si su potencia mecánica es de $200x10^5$ W, ¿cuánto tiempo emplea el cargador en alcanzar esta altura?
e. La suma de las potencias de un cargador de combustible diésel y otro a gasolina es de $14x10^4$ W. Si ambos cargadores emplean un tiempo de seis segundos en elevar verticalmente un cuerpo de masa 2000 kg, y el primero de ellos alcanza una altura de 1/3 h (*h* es la altura a la que el cargador de combustible a gasolina eleva el cuerpo de masa *m*), calcule la altura a la que cada cargador eleva el cuerpo y la potencia empleada por cada uno de los cargadores para elevar el cuerpo.
f. La razón de potencias entre los motores de dos montacargas es de 0,25. Si la suma de los tiempos empleados por cada uno de ellos para elevar un

cuerpo de masa *m*, a una misma altura de 6,3 m es de 10 s, determine la masa del cuerpo y el tiempo empleado por cada uno de ellos para elevar la masa *m*.

g. Un motor eléctrico le imprime una fuerza de tracción de 10 N a un carro de juguete, generándole una rapidez de 2 cm/s. Si el desplazamiento y la velocidad del carro mantienen la misma dirección en el tiempo, determine la potencia del motor.
h. La rapidez media de un carro de tracción animal que viaja en línea recta es de 4,2 m/s, cuando éste le imprime una potencia constante de 20 W. ¿Cuál es la fuerza aplicada por el animal al carro?

3) Problemas de energía

a. Un jugador de fútbol, quien se dispone a cobrar un penalti, alcanza a impulsar el balón de masa 440 gr a ras de césped con rapidez constante de 16 $x10^3$ cm/s. Calcule la energía cinética transferida a la pelota por el jugador, suponiendo la inexistencia de rozamiento de esta con el medio.
b. Un joven, con un rifle de balines de masa 30 gr, realiza un disparo directo hacia una paloma de masa 80 gr que se encuentra en reposo en la rama de un árbol. Si el balín impacta directamente al ave, se aloja en su cuerpo y le genera, además, una rapidez lineal de 8 cm/s, ¿cuál es el valor de la energía cinética que el proyectil le imprime a la paloma?
c. Una estudiante de biofísica reporta en su diario el vuelo de un águila. En su agenda dice que cuando el ave desciende directamente en picada hacia la superficie de la tierra su rapidez promedio es de 20,24 m/s. Determine la masa del águila si en el informe reportado por la estudiante expresa que su energía cinética es de 460,8 J.
d. Calcule la rapidez con la que mueve un avión de masa 178,75 $x10^3$ kg si su energía cinética es de 1,8 MJ.
e. Un resorte de constante de fuerza 0,25 N/m es desplazado hacia la derecha de su posición de equilibrio una distancia de 224 cm. ¿Cuánta energía potencial elástica es almacenada por un cuerpo de masa *m* conectada al resorte?
f. Una cauchera es estirada 20 cm, medido este valor desde su posición de equilibrio. Determine la energía potencial elástica almacenada en la cauchera si la constante de elasticidad de las bandas de caucho es de 0,4 N/m. Véase la Fig. 275.

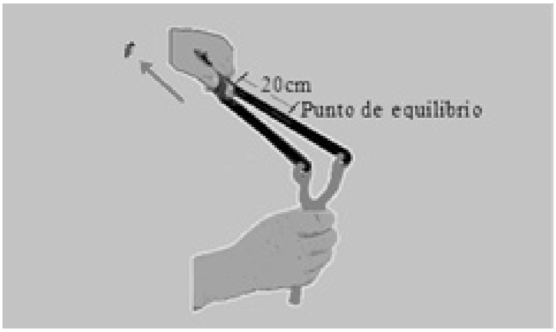


Figura 275. Cauchera estirada respecto a su punto de equilibrio una longitud de 20cm. Fuente: elaboración propia

g. La energía potencial elástica almacenada en un resorte de constante de elasticidad 4,8 N/m es de 26,62 J. Determine el desplazamiento sufrido por el resorte, medido este último desde su punto de equilibrio.
h. Las bandas de una resortera sufren un estiramiento de 18,24 cm (medido esto desde su punto de equilibrio). Determine la constante elástica de las bandas de caucho si la fuerza aplicada sobre ellas es de 30,44 N.
i. Determine la energía potencial gravitacional de una camiseta de masa 230 gr que se encuentra colgada a una altura respecto a la superficie terrestre de 150 cm. Véase la Fig. 276.

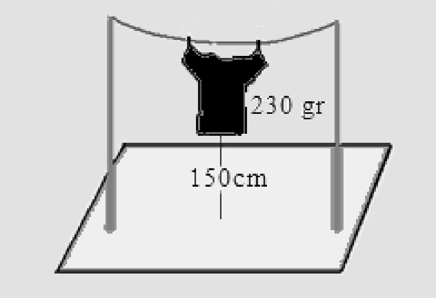


Figura 276. Camiseta con energía potencial gravitacional debido a su altura respecto a la superficie terrestre de 150cm. Fuente: elaboración propia

j. Un estudiante de física determina que la energía potencial gravitacional que posee la antena satelital de una empresa de servicio televisivo, ubicada en la azotea de un edificio es de 38 J. Si la masa de la antena es de 2400 gr, determine la altura del edificio.

k. Un resorte previamente estirado 30,24 cm almacena una energía potencial elástica de 28,45J. Determine la constante de elasticidad del resorte.
l. Determine la constante de elasticidad de las bandas de una resortera, las cuales al ser desplazadas una distancia de 32 cm, almacenan una energía potencial de 22,3 J.
m. Determine la masa m de un cuerpo que se encuentra a una altura con respecto a la superficie terrestre de 2300 cm, y almacena una energía potencial gravitacional de 120 J.
n. Determine la energía mecánica de un cuerpo de masa 1,42 kg, el cual se encuentra adherido a un resorte de constante de fuerza 0,85 N/m, en el instante en el que este presenta una posición de 129,4 cm con respecto a su posición de equilibrio y rapidez de 2,32 cm/s.
o. La energía mecánica de un cuerpo que viaja paralelo a la superficie terrestre es de 48,12 J. Si su masa es de 1,32 kg y presenta una altura respecto a la superficie terrestre de 240 cm, ¿cuál es la rapidez con la que se mueve el cuerpo?
o. Una masa de 1200 gr se eleva verticalmente a la superficie terrestre y presenta en un punto determinado una rapidez de 2,5 m/s. ¿A qué altura con respecto a la superficie terrestre se encuentra el cuerpo, si se conoce que su energía mecánica es de 62,14 J?¿Cuál es la rapidez de esta masa cuando el cuerpo impacta la superficie de la tierra?
p. Un resorte de constante de fuerza 5,2 N/m y una masa adherida a su extremo libre de 0,42 kg presentan una energía mecánica de 32,64 J. Si en un punto determinado el cuerpo tiene una rapidez de 12,3 cm/s, ¿qué posición registra el cuerpo en este punto?
q. La energía mecánica de un sistema masa resorte es de 46,42 J. Si en un punto determinado la energía cinética de la masa es la mitad de su energía potencial elástica, determine el valor de la constante del resorte si la masa es de 1200 gr.
r. ¿Cuál es la rapidez de la masa en el punto donde la energía cinética y la energía potencial tienen igual valor?
s. Determine la energía potencial elástica de una resortera que contiene una masa de 60 gr, y cuyas bandas de constante elástica de 4,3 N/m son estiradas una distancia de 16 cm con respecto a su posición de equilibrio. ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando se encuentra a los 16 cm? ¿Cuál es el valor de su energía mecánica?

t. Determine la energía mecánica de un cuerpo de masa 4,32 kg que se mueve paralelo a la superficie terrestre con rapidez constante de 16 cm/s, sabiendo que su energía potencial gravitacional respecto a la Tierra es el doble de su energía cinética. ¿A qué altura se encuentra el cuerpo respecto a la superficie terrestre? ¿Cuál es el valor de su energía potencial gravitacional?

u. El capitán de un avión de carga le reporta al controlador del aeropuerto que se encuentra a 12 000 pies de altura, y su rapidez es de 4,2 millas/h. Determine la energía mecánica de la nave si su masa es de 78 000 kg.

v. Una estudiante de física determina que la energía mecánica de un aeroplano que se mueve paralelo a la superficie terrestre es de 120,40 J. Si en su libreta de apuntes registra que la altura de la nave respecto a la superficie terrestre es de 9000 pies y su rapidez es 0,89 km/h, determine la masa del aeroplano.

w. Determine la energía mecánica de un protón que se mueve a rapidez constante de 26 m/s y pasa cerca de otro protón en reposo a una distancia de $2x10^{2}$ cm.

4) Problemas de conservación de la energía

a. Un cuerpo de masa 2,45 kg se lanza verticalmente hacia arriba a una rapidez de 5 m/s desde una altura de 1,2 m. Utilizando el principio de conservación de la energía determine su rapidez cuando ha alcanzado una altura de 2,5 m. ¿A qué distancia respecto a la superficie terrestre se encuentra el cuerpo cuando este ha alcanzado su máxima altura?

b. De acuerdo con la Fig. 277 y el principio de conservación de la energía determine la rapidez *vy* con la que la masa de 0,5 kg se mueve en el punto B.

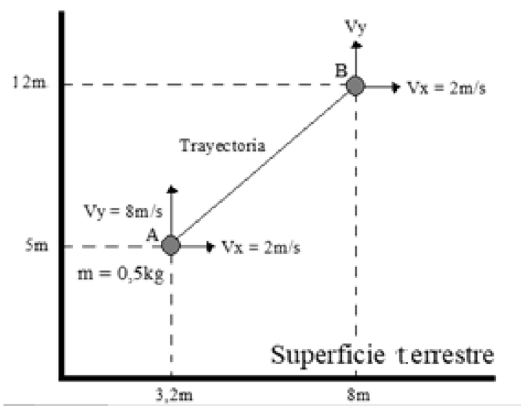


Figura 277. Cuerpo moviéndose sobre la superficie terrestre. Fuente: elaboración propia

c. Si la masa de 0,5 kg se encontrara en todo el punto medio de la trayectoria que se indica en la Fig. 277, ¿cuál es el valor de la rapidez del cuerpo en este punto? ¿Cuál es el valor de su energía mecánica?

d. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, ¿qué le pasaría a la energía potencial de un cuerpo de masa *m* si su energía cinética se duplica?, ¿qué le pasaría a la energía cinética del cuerpo si ahora la que se duplica es su energía potencial?

e. Una masa de 1 kilogramo se desliza sobre una superficie curva sin rozamiento, tal como se muestra en la Fig. 278. Utilizando el principio de conservación de la energía determine la rapidez con la que la pelota llega al punto B. ¿Con qué velocidad llega la pelota al punto C?

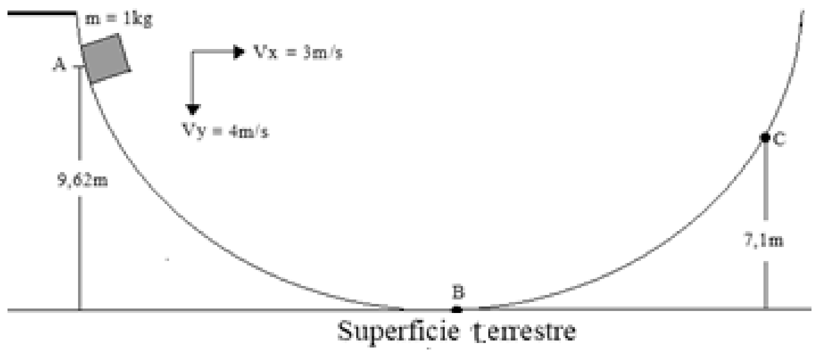


Figura 278. Cuerpo moviéndose a través de una superficie semiesférica sin rozamiento. Fuente: elaboración propia

e. En la Fig. 279 se muestra una pelota de masa 0,6 kg que se mueve sobre una superficie curva y lisa, con rapidez constante de 16 m/s en el punto A. Utilizando el principio de conservación de la energía determine la rapidez de la pelota en B, la altura de la pelota en C, la rapidez de la pelota en D.

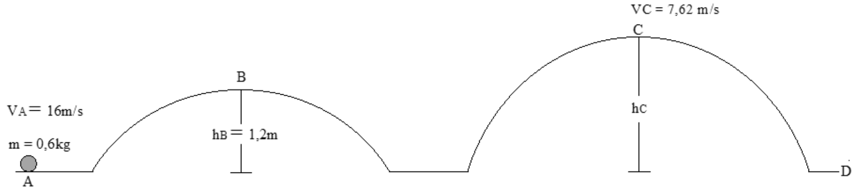


Figura 279. Pelota moviéndose a través de una trayectoria curva. Fuente: elaboración propia

f. Un cuerpo de masa 3,52 kg se lanza desde una altura de 10,22 m hacia abajo con rapidez inicial de 2,8m/s, directamente hacia un resorte de 0,42 m de longitud y constante de fuerza 13200 N/m. Utilizando el principio de conservación de la energía mecánica determine la rapidez del cuerpo un instante antes de empezar a comprimir el resorte. ¿Cuánto se comprime el resorte cuando la velocidad del cuerpo se reduce 6,2 m/s? Determine también el valor de la energía potencial elástica en el resorte bajo las condiciones del inciso b). Véase la Fig. 280.

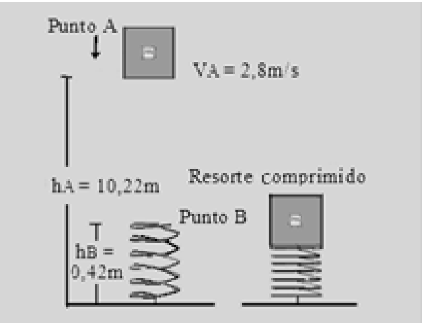


Figura 280. Cuerpo de masa 3,52kg la cual fue lanzada desde una altura de 10,22m hacia un resorte que se encuentra adherido al piso. Fuente: elaboración propia

g. Una masa de 2,4 kg se mueve sobre una superficie lisa horizontal con rapidez constante de 12,4 m/s. Si la masa choca con un resorte que se encuentra en su trayectoria de constante de fuerza 2,82 N/m y de longitud 120 cm, calcule la longitud comprimida máxima *x* en el resorte y la energía potencial en el resorte cuando la rapidez de la masa ha disminuido a 5,2 m/s. Véase la Fig. 281.

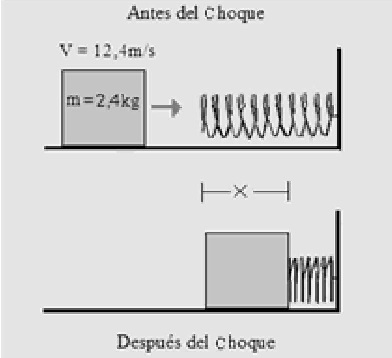


Figura 281. Cuerpo moviéndose sobre una superficie lisa hacia la ubicación de un resorte que se encuentra en su trayectoria. Fuente: elaboración propia

5) Problemas de trabajo y energía

a. Determine el trabajo realizado sobre un cuerpo de masa 620,44 gr, cuando al aplicarle una fuerza constante *F* en dirección *x* esta pasa del reposo a tener una rapidez de 10,62 cm/s después de ser trasladada una distancia D.

b. Un cuerpo de 1,35 kg de masa se mueve en línea recta con rapidez inicial de 10,8m/s. Después de que una fuerza externa realiza un trabajo sobre él de 220,6 J se encuentra que su rapidez ha sufrido una variación apreciable. Determine la rapidez final que presenta la masa.

c. Una pistola neumática dispara balines a una rapidez de 24 cm/s. Si uno de estos balines que tiene una masa de 0,12 kg penetra en línea recta una sandía que se encuentra en su trayectoria una profundidad de 8,90 cm, determine la magnitud de la fuerza media que actúa en el balín para detenerlo.

d. Una fuerza de magnitud *F* realiza un trabajo de 12,34 J sobre una masa de 1200 gr. Si la rapidez inicial de la masa *v0* es igual a 1/3 de su rapidez final, determine la magnitud de la velocidad inicial de la masa, la magnitud de la fuerza *F* y la rapidez final de la masa.

e. Una fuerza constante de 34,54 N se aplica sobre un cuerpo de masa 0,22 kg, desplazándolo desde un punto A a un punto B. Si la rapidez del cuerpo en el primer punto era de 24,36 cm/s y en el segundo es de 2,8 m/s, determine la distancia recorrida por el cuerpo para ir del primer punto al segundo y el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo entre estos dos puntos.

f. Un cuerpo de masa 4,32 kg pasa de tener una rapidez de 22,43 m/s a 674 cm/s, a causa de una fuerza externa que actúa sobre ella. Determine el trabajo realizado por la fuerza externa sobre la masa, la aceleración sufrida por el cuerpo si el cambio de rapidez se realizó en 4 s, el desplazamiento sufrido por cuerpo en este tiempo y la magnitud de la fuerza externa aplicada.

g. Un cuerpo inicialmente en reposo, en 6,32 s pasa a tener una rapidez de 13,24 m/s. Determine la magnitud de la fuerza aplicada sobre el cuerpo, la magnitud de la aceleración del cuerpo, el trabajo realizado sobre el cuerpo y la distancia recorrida por el cuerpo en este tiempo.

h. Una fuerza externa constante de 10,56 N desplaza durante cierto tiempo un cuerpo de masa *m* una distancia de 180,42 cm de longitud. Determine el valor de la masa *m* del cuerpo si este paso de tener una rapidez de 12,34 m/s a 16, 21 m/s. ¿Cuál es el valor de tiempo en el que se llevó a cabo este cambio de rapidez?

Referencias

[1] C. Gutiérrez, "Trabajo y energía", en *Física general*, J. Rodríguez y L. A. Valdez, Eds. México: McGraw Hill, 2009, pp. 147-161.

[2] D. E. Roller y R. Blum, "Trabajo, potencia y energía", en *Mecánica, ondas y termodinámica*, J. de la Rubia y J. Aguilar, Eds. Barcelona: Reverté, 1983, pp. 161-207.

[3] R. Serway, "Trabajo y energía", en *Física*, G. Nagore, E. Cruz y J. Brenes, Eds., 4ª ed. México: McGraw Hill, 1997, pp. 173-193.

[4] S. Gartenhaus, "El trabajo y la energía cinética", en *Física 1. mecánica*, A. Contin, Ed. México: N. E. Interamericana, 1979, pp. 161-179.

[5] M. Alonso y E. J. Finn, "Trabajo y energía," en *Física Volumen I: mecánica*, C. Hernández, V. Latorre y J. Herkrath, Eds. Wilmington EE. UU.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986, pp. 202-224.

[6] L. Vargas, "Dinámica", en *Física fundamental*, G. Solano y J. C. Serna, Eds. Barranquilla, Colombia: Prisma Publicación, 1991, pp. 29-37.

[7] D. C. Giancoli, "Conservación de la energía", en *Física para ciencias e ingenierías*, R. Fuerte, Ed., 4ª ed. México: Pearson Educación, 2008, pp. 163-175.

[8] F. P. Beer, E. R. Johnston y E. R. Eisenberg, "Método del trabajo virtual", en *Mecánica vectorial para ingenieros: estática*, R. A. del Bosque y P. E. Roig, Eds., 8ª ed. México: McGraw Hill, 2007, pp. 560-566.

[9] P. A. Tipler, "Energía potencial y fuerzas conservativas", en *Física,* J. Aguilar y J. de la Rubia, Eds. Barcelona: Reverté, 1977, pp. 221-240.

[10] F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman, "Trabajo y energía cinética", en *Física universitaria,* R. García y J. Lomas, Eds., Vol. I, 11ª ed. México: Pearson Educación, 2004, pp. 207-227.

[11] F. Bueche, "Trabajo y energía", en *Fundamentos de física I*, G. Zetina, A. R. Ortiz y R. Barbosa, Eds., 3ª ed. México: McGraw Hill, 1984, pp. 85-97.

[12] P. A. Tipler y G. Mosca, "Trabajo y energía", en *Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica*, A. Bramón y J. Casas, Eds., 5ª ed., Barcelona: Reverté , 2006, pp. 141-159.

[13] J. D. Wilson, A. J. Buffa y B. Lou, "Mecánica", en *Física*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds., 6ª ed. México: Pearson Educación, 2007, pp. 140-167.

[14] H. Pérez, “Dinámica”, en *Física general,* J. Callejas y A. Sámano, Eds., 4ª ed. México: Grupo Editorial Patria, 2014, pp. 179-204.

[15] A. M. Sánchez, “Energía”, en *Física: guía para el estudiante*, J. E. Villa y E. Parada, Eds. México: Academia Institucional de Física del Instituto Politécnico Nacional, 2010, pp. 147-162.

[16] L. K. Branson, “Trabajo y energía II”, en *Mecánica: para estudiantes de ingeniería*, L. Alava, L. C. Díaz y J. Montiel, Eds. Nueva York, EE. UU.: Fondo Educativo Interamericano, 1973, pp. 346-371.

[17] J. L. Llorente y A. Rueda, “Trabajo y energía”, en *Física. Tomo 1*, 4ª ed., C. Suárez, Ed. Madrid: Aguilar, 1999, pp. 127-151.

[18] J. D. Cutnell y K. W. Johnson, “Trabajo y energía”, en *Física*, H. Villagomez, Ed., 2ª ed. México: Limusa Wiley, 2004, pp. 155-174.

[19] R. Resnick, D. Halliday y K. S. Krane, “Conservación de la energía”, en *Física Vol. 1*, 3ª ed., J. Wiley, Ed. México: Compañía Editorial Continental, 1993, pp. 171-187.

[20] F. W. Sears y M. W Zemansky, “Trabajo y energía”, en *Física*, A. Yusta, Ed. Madrid: Aguilar, 1972, pp. 151-171.

[21] W. Hauser, “Movimiento de las partículas: movimiento unidimensional”, en *Introducción a los principios de mecánica*, C. Ordoñez y S. Alonso, Eds. México: Addison-Wesley, Hispano Americana, 1969, p. 104.

[22] S. M. Lea y J. R. Burke, “Conservación de la energía”, en *Física Vol. 1. La naturaleza de las cosas*, M. A. Toledo y R. Garay, Eds. México: International Thomson Editores, 1999, pp. 259-277.

[23] E. Hecht, “Energía”, en *Física 1. Algebra y trigonometría*, 2ª Ed., M. A. Toledo, P. de la Garza y R. Garay, Eds. México: International Thomson Editores, 2000, pp. 175 -201.

[24] P. G. Hewitt, “Energía”, en *Física conceptual*, E. Quintanar y F. Hernández, Eds. México: Pearson Educación, 2007, pp. 110-139.

Este libro fue publicado por la Editorial Uniagustiniana.
Su texto se compone de letra tipo ITC Berkeley Oldstyle Std.

Se imprimió en los talleres de Xpress, Estudio gráfico y digital,
Xpress Kimpres sobre Holmen Book de 60 grs.